Michael Baake
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Bielefeld, 28.4.2025

LAP 3: Gruppen und ihre Darstellungen

Sommersemester 2025

Übungsblatt 4

(13) Sei $\mathcal{M}$ eine Menge und $\mathcal{V}$ eine *Partition* von $\mathcal{M}$, d.h. $\mathcal{V} = \{V_i\}$ mit $V_i \subseteq \mathcal{M}$ und

$$\mathcal{M} = \bigcup_i V_i \quad \text{sowie} \quad V_i \cap V_j = \varnothing \quad \text{für alle} \quad i \neq j\,.$$

Auf $\mathcal{M}$ definieren wir die Relation $\sim$ durch

$$x \sim y \quad :\Leftrightarrow \; \exists\, i \,:\, x, y \in V_i\,.$$

Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation definiert.
Betrachten Sie umgekehrt eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{M}$ und zeigen Sie, dass dadurch stets eine Partition auf $\mathcal{M}$ induziert wird.

(2 Punkte)

(14) Sei G eine Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untegruppe. In der Vorlesung wurden dazu bereits die sogenannten (Links-)Nebenklassen

$$\{g \cdot H : g \in G\}$$

zu H definiert. Rechnen Sie nach, dass durch

$$g_1 \sim g_2 \quad :\Leftrightarrow \quad g_1^{-1} g_2 \in H$$

eine Äquivalenzrelation auf G definiert ist. Erklären Sie, welche Verbindung die Äquivalenzrelation zu den oben genannten Nebenklassen hat (Stichwort: *Äquivalenzklassen*). Geben Sie für $G = \mathbb{Z}$ mit der Untergruppe $H = 5\mathbb{Z}$ die Nebenklassen direkt an. Wieviele gibt es hier? Zeigen Sie, dass es keine weiteren geben kann.

(2 Punkte)

(15) Wir nennen eine Gruppe G *ambivalent*, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\forall\, g \in G \quad \exists\, x \in G \quad : \quad g^{-1} = x g x^{-1}\,.$$

Das Invertieren in G ist also durch Konjugation gegeben. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die symmetrische Gruppe S_n ist ambivalent ($n \geq 1$). Erinnern Sie sich hierzu an die Aussagen über die *Zykelzerlegung* aus LAP1.

(b) Bestimmen Sie alle endlichen abelschen Gruppen, die ambivalent sind. Überlegen Sie sich hierzu, wie die Äquivalenzklassen zur Konjugationsoperation aussehen.

(2 Punkte)

(16) Es seien G, H Gruppen. Betrachten Sie $(G \times H, \cdot)$, wobei die Operation $\cdot$ durch

$$(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) := (g_1 g_2, h_1 h_2)$$

gegeben sei. Zeigen Sie, dass dies eine Gruppe definiert (das *direkte Produkt* von G und H).

Sei nun $K := G \times H$ das direkte Produkt und

$$\widetilde{G} := \{(g, e_H) : g \in G\}$$

eine Untergruppe von K (muss nicht gezeigt werden). Zeigen Sie, dass durch Bildung der Faktorgruppe (warum ist diese hier wohldefiniert?) die einzelnen *Komponenten* zurückgewonnen werden können:

$$K/\widetilde{G} \simeq H\,.$$

(Analog gilt dies natürlich auch für $K/\widetilde{H} \simeq G$.)

Führen Sie die analogen Schritte (soweit wohldefiniert) für das semidirekte Produkt $G \times H$ aus der Vorlesung durch.

(2+2 Punkte)

Abgabe bis Montag, 5.5.2025, 12 Uhr, beim Tutor (Postfach Nr. 34)!