

LAP 3: Gruppen und ihre Darstellungen

Sommersemester 2025

Übungsblatt 5

- (17) Die Euklidische Gruppe $E(n)$ hat zwei wichtigen Untergruppen: Die Gruppe aller Translationen $T(n)$, und die Gruppe, die den Koordinatenursprung erhält. Zeigen Sie, dass $T(n)$ ein Normalteiler ist. Schließen Sie daraus, dass sich $E(n)$ als das semi-direkte Produkt dieser Gruppen schreiben lässt.

(2 Punkte)

- (18) Sei (G, \cdot) eine Gruppe und $H \subseteq G$ ein Normalteiler. Wir kennen bereits die *kanonische Projektion*

$$\gamma : G \longrightarrow G/H, \quad \text{def. durch } g \longmapsto \gamma(g) = g \cdot H,$$

allerdings nur als Abbildung zwischen Mengen. Zeigen Sie, dass γ sogar einen Homomorphismus definiert, mit $\text{Kern}(\gamma) = H$.

Sei nun G' eine weitere Gruppe und $\phi : G \rightarrow G'$ ein beliebiger Homomorphismus mit $\text{Kern}(\phi) =: H'$. Dann ist $\text{Im}(\phi)$ eine Gruppe, und durch die Vorschrift

$$\mu : G/H' \longrightarrow \phi(G), \quad \text{def. durch } g \cdot H' \longmapsto \mu(g \cdot H') = \phi(g),$$

ist ein Isomorphismus gegeben (d.h. $G/\text{Kern}(\phi) \simeq \text{Im}(\phi)$).

(2 Punkte)

- (19) Wir schreiben die Diedergruppe D_n in Generatorschreibweise,

$$D_n = \langle \{x^k y^\ell : x^n = e, y^2 = e, (xy)^2 = e\} \rangle.$$

Zeigen Sie, dass es Untergruppen H_1, H_2 in D_n gibt mit

$$H_1 \simeq C_2, \quad H_2 \simeq C_n,$$

wobei H_2 sogar Normalteiler ist. Rechnen Sie nach, dass D_n das semidirekte Produkt dieser Gruppen ist, d.h.

$$D_n \simeq C_2 \rtimes C_n.$$

(2 Punkte)

(20) Jede Kante des Quadrats sei durch einen Widerstand mit 1Ω ersetzt. Was ist dann der Widerstand zwischen 2 Ecken (es gibt bis auf Symmetrie 2 Fälle)?

Nun betrachten wir den Widerstandswürfel in drei Dimensionen, mit 1Ω entlang jeder Kante. Was ist jetzt der Widerstand zwischen 2 antipodalen Ecken?

Hinweis: Nutzen Sie eine Symmetrieüberlegung zu den Äquipotentialpunkten.

(2 Punkte)