

LAP 3: Gruppen und ihre Darstellungen

Sommersemester 2025

Übungsblatt 6

- (21) (a) Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ ein Gitter, mit Basis $\{b_1, \dots, b_d\}$, also $\Gamma = \mathbb{Z}b_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}b_d$. Sei ferner $T \in \text{GL}(d, \mathbb{R})$. Zeigen Sie:

$$T\Gamma \subseteq \Gamma \implies \det(T - x \cdot \mathbb{1}) \in \mathbb{Z}[x]$$

(dabei ist $\mathbb{Z}[x]$ der Ring der Polynome in einer Veränderlichen x mit ganzzahligen Koeffizienten).

- (b) Leiten Sie hieraus ab, dass es keine 5-zählige Drehung geben kann, die ein Gitter im \mathbb{R}^2 auf sich selbst abbildet.

Hinweis: Wie sieht das charakteristische Polynom für n -zählige Drehung aus?

(2 Punkte)

- (22) Konstruieren Sie Darstellungen von Gruppen für 5 Beispiele (nicht alle abelsch, nicht alle vom Grad 1, nicht nur für endliche Gruppen).

(2.5 Punkte)

- (23) Sei \mathcal{H} ein Hilbertraum (ein vollständiger, unitärer Raum), mit Skalarprodukt $\langle \cdot | \cdot \rangle$. Sei G eine endliche Gruppe und U eine Darstellung von G auf \mathcal{H} . Zeigen Sie, dass

$$\langle x | y \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (U(g)x | U(g)y)$$

wieder ein Skalarprodukt auf \mathcal{H} liefert, das G -invariant ist.

(2 Punkte)

- (24) Sei $G = S_n$, und $U(\pi) := (\delta_{i, \pi(j)})_{1 \leq i, j \leq n} \in \text{Mat}(n, \mathbb{C})$. Zeigen Sie:

(a) Dies definiert eine Darstellung von S_n vom Grad n .

(b) Die Darstellung ist reduzibel.

Versuchen Sie, irreduzible Anteile zu bestimmen (es braucht nicht gezeigt werden, dass alle Anteile gefunden wurden).

Hinweis: Es gibt einen eindimensionalen invarianten Unterraum.

(2 Punkte)

Abgabe bis Montag, 19. 5. 2024, 12 Uhr, beim Tutor (Postfach Nr. 34)!