Michael Baake
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Bielefeld, 19. 5. 2025

LAP 3: Gruppen und ihre Darstellungen

Sommersemester 2025

Übungsblatt 7

(25) Es sei $Y = \{1, 2, \ldots, N\}$. Konstruieren Sie den komplexen Vektorraum der Funktionen auf Y (mit Werten in $\mathbb{C}$).

(a) Was ist eine geeignete Basis?

(b) Was ist die Dimension? (Beweis!) **(2 Punkte)**

(26) Sei G eine endliche Gruppe und $\mathcal{A}(G)$ die zugehörige Gruppenalgebra. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$L : G \longrightarrow \mathrm{Aut}\big(\mathcal{A}(G)\big) \quad \text{mit} \quad \big(L(x)f\big)(y) := f(x^{-1}y)$$

eine Darstellung von G auf $\mathcal{A}(G)$ liefert.

Weisen Sie auch die Unitarität von L bzgl. des Skalarproduktes

$$\langle f|g\rangle \quad := \quad \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\overline{f(x)}g(x)$$

nach $\big(f, g \in \mathcal{A}(G)\big)$.

(3 Punkte)

(27) Konstruieren Sie die links-reguläre Darstellung für $G = C_2$ und $G = C_3$ explizit. Versuchen Sie, die irreduziblen Anteile zu bestimmen.

(2 Punkte)

(28) Sei G erneut eine endliche Gruppe und $\mathcal{A}(G)$ wieder die Gruppenalgebra. Dann existiert eine Bijektion zwischen den Darstellungen von G und den $*$-Darstellungen von $\mathcal{A}(G)$ durch die Beziehung

$$U_{\mathcal{A}}(a) = \sum_{g\in G} a(g)U(g)\,,$$

wobei U eine Darstellung von G ist.

Der Beweis des Satzes wurde in der Vorlesung bereits skizziert. Führen Sie diesen nun vollständig aus.

(2 Punkte)

Abgabe bis Montag, 26. 5. 2025, 12 Uhr, beim Tutor (Postfach Nr. 34)!