Michael Baake

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Bielefeld, 6.6. 2024

LAP 3: Gruppen und ihre Darstellungen

Sommersemester 2025

Übungsblatt 8

(29) Wir betrachten eine n-te Einheitswurzel (EHW) $\zeta \in \mathbb{C}$, also ein ζ, welches Nullstelle des Polynoms $p(z) = z^n - 1$ ist. Dann definiert

$$C_n := \{\zeta \in \mathbb{C} \, : \, \zeta \text{ ist } n\text{-te EHW}\}$$

eine Gruppe mit der komplexen Multiplikation als Gruppenoperation.
Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Es existiert ein Isomorphismus $\varphi_n : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to C_n$. Geben Sie φ_n explizit an, indem Sie die Elemente von C_n geeignet durch eine primitive n-te EHW

$$\xi_n := \exp\left(\frac{2\pi \mathrm{i}}{n}\right)$$

ausdrücken.

(b) Es seien nun $m, n \in \mathbb{N}$, sowie $d := \mathrm{ggT}(m, n)$. Dann folgt $C_m \cap C_n = C_d$.

(c) Zeigen Sie, dass die Darstellungen $D,\ D'$ gegeben durch

$$D : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathrm{Gl}(2, \mathbb{C}), \qquad [m] \mapsto \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi m}{n}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi m}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi m}{n}\right) & \cos\left(\frac{2\pi m}{n}\right) \end{pmatrix},$$

und

$$D' : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathrm{Gl}(2, \mathbb{C}), \qquad [m] \mapsto \begin{pmatrix} \xi_n^m & 0 \\ 0 & \xi_n^{-m} \end{pmatrix}$$

äquivalent sind. **(4 Punkte)**

(30) Betrachten Sie die Paulimatrizen zusammen mit der Einheitsmatrix:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Bilden diese Elemente zusammen mit der Matrizenmultiplikation eine Gruppe? Falls nein, was sind die zusätzlichen Elemente die man erhält, wenn man die von den Elementen erzeugte Gruppe betrachtet?

(b) Für $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$ ist der *Antikommutator* zweier Elemente A, B durch

$$\{A, B\} \;:=\; A \cdot B + B \cdot A$$

definiert. Berechnen Sie diesen für alle Paulimatrizen.

(c) Zeigen Sie, dass $\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \in \mathrm{SU}(2)$ gilt, wobei $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\sigma} := x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + x_3\sigma_3$ mit $x_i \in \mathbb{R}$ definiert ist.

(3 Punkte)

Sei $D : G \to \mathrm{Aut}(V)$ eine Darstellung von grad 3 einer endlichen Gruppe.

(a) Zeigen Sie, dass D genau dann reduzibel ist, wenn es einen gemeinsamen Eigenvektor für alle $D(g)$ gibt.

(b) Sei $F(a, b)$ die freie Gruppe mit den beiden Erzeugern a und b (die Menge aller endlichen Folgen mit Elementen aus $\{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$). Überprüfen Sie die Darstellung $D : F(a, b) \to \mathrm{Gl}(3, \mathbb{C})$, die durch

$$D(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist, auf Reduzibilität.

(2 Punkte)

Abgabe bis Montag, 2. 6. 2025, 12 Uhr, beim Tutor (Postfach Nr. 34)!