Michael Baake

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Bielefeld, 2.6. 2025

LAP 3: Gruppen und ihre Darstellungen

Sommersemester 2025

Übungsblatt 9

(32) Sei G eine abelsche Gruppe und V ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum. Zeigen Sie, dass jede irreduzible Darstellung $D : G \to \mathrm{Gl}(V)$ vom Grad 1 ist.

(2 Punkte)

(33) Bestimmen Sie (bis auf Äquivalenz) alle irreduziblen Darstellungen der zyklischen Gruppe C_n, für $n \in \{2, 3, 4\}$.

(3 Punkte)

(34) Bestimmen Sie alle injektiven, affinen Abbildungen, die $\mathbb{Z}$ invariant lassen.
Was ist deren Struktur?
Welcher Zusammenhang besteht zum „linearen“ Teil?

(2 Punkte)

(35) Eine Partition einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist eine endliche Folge

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_k \quad (k, a_i \in \mathbb{N})$$

mit $a_1 + \cdots + a_k = n$. Die Partitionsfunktion p liefert die Anzahl möglicher Partitionen von $n \in \mathbb{N}$.

(a) Bestimmen Sie $p(n)$ für $1 \leqslant n \leqslant 10$.

(b) Ermitteln Sie eine Formel für die erzeugende Funktion von p, also für $P(z) := \sum_{n \geqslant 0} p(n) z^n$, mit $p(0) := 1$.

(2+2 Punkte)

(36) Die Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ wird oft *unendliche zyklische Gruppe* gennant, weil sie durch ein Element μ erzeugt wird. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$D : (\mathbb{Z}, +) \simeq \langle \mu \rangle \longrightarrow \mathrm{Gl}(2, \mathbb{C}), \quad \mu \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eine Darstellung definiert, und entscheiden Sie, ob die Darstellung vollständig reduzibel ist.

(3 Punkte)

Abgabe bis Montag, 9. 6. 2025, 12 Uhr, beim Tutor (Postfach Nr. 34)!