Michael Baake
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Bielefeld, 30.6. 2025

LAP 3: Gruppen und ihre Darstellungen

Sommersemester 2025

Übungsblatt 12

(42) In der Vorlesung wurde die Konstruktion der irreduzibeln Darstellungen von D_n skizziert. Führen Sie diese nun vollständig mit allen Details aus.

(4 Punkte)

(43) Betrachten Sie die Gruppe $G = S_n, n \geq 2$, mit der Abbildung $U(\pi) := (\delta_{i,\pi(j)})_{1 \leq i,j \leq n}$. In Aufgabe 24 wurde bereits gezeigt, dass U eine reduzible Darstellung ist. Zeigen Sie nun zusätzlich:

(a) U ist eine *treue* Darstellung der S_n.

(b) Die Darstellung ist reduzibel mit

$$U \;\simeq\; U^{(0)} \oplus \widetilde{U}\,,$$

wobei $U^{(0)}(\pi) \equiv 1$ und $\dim(\widetilde{U}) = n - 1$.

(c) Die obige Komponente $\widetilde{U}$ ist treu und irreduzibel.

(3 Punkte)

(44) Ermitteln Sie alle treuen, irreduziblen Darstellungen von C_4 und C_5.

(2 Punkte)

(45) Wir betrachten die sogenannte Quaternionengruppe $Q_8 := \{\pm 1, \pm \mathrm{i}, \pm \mathrm{j}, \pm \mathrm{k}\}$ mit der Verknüpfung

·	1	-1	i	-i	j	-j	k	-k
1	1	-1	i	-i	j	-j	k	-k
-1	-1	1	-i	i	-j	j	-k	k
i	i	-i	-1	1	k	-k	-j	j
-i	-i	i	1	-1	-k	k	j	-j
j	j	-j	-k	k	-1	1	i	-i
-j	-j	j	k	-k	1	-1	-i	i
k	k	-k	j	-j	-i	i	-1	1
-k	-k	k	-j	j	i	-i	1	-1

d.h. es gilt $\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = \mathrm{ijk} = -1$.

(a) Wie in der Vorlesung bezeichne $\mathcal{Z}(G)$ die Menge der Abbildungen $f : G \to \mathbb{C}$ mit $f(h^{-1}gh) = f(g)$ für alle $g, h \in G$. Bestimmen Sie $\mathcal{Z}(G)$ für $G = Q_8$.

(b) Zeigen Sie, dass Q_8 ismorph zu der Gruppe

$$G' := \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ist.

(3 Punkte)

Abgabe bis Montag, 7. 7. 2025, 12 Uhr, beim Tutor (Postfach Nr. 34)!