Michael Baake

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Bielefeld, 7.7.2025

LAP 3: Gruppen und ihre Darstellungen

Sommersemester 2025

Übungsblatt 13

(46) Berechnen Sie $[G,G]$ und $|G/[G,G]|$ für $G = D_3$ und $G = D_4$, und bestätigen Sie so die in der Vorlesung angegebenen Zahlen eindimensionaler Darstellungen.

(2 Punkte)

(47) Es bezeichne $\mathcal{A}$ die Menge der algebraischen ganzen Zahlen.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$.

(b) Sei B eine Matrix aus Elementen von $\mathcal{A}$, und α ein Eigenwert von B. Dann ist $\alpha \in \mathcal{A}$.

(1+2 Punkte)

(48) Betrachten Sie die *Isokaedergruppe* $Y\bigl(|Y| = 60\bigr)$, also die Punktgruppe des Isokaeders. Diese kann als

$$Y = \langle r, u \,:\, r^3 = u^2 = (ru)^5 = e \rangle$$

geschrieben werden, ist aber auch isomorph zur alternierenden Gruppe A_5. Mit der Notation $g_2 = u, g_3 = r, g_5 = rur$ kann die Charaktertafel durch

Charakter	(e)	(g_2)	(g_3)	(g_5)	(g_5^2)	Klasse
	1	15	20	12	12	Ordnung
$\chi^{(1)}$	1	1	1	1	1	
$\chi^{(4)}$	4	0	1	-1	-1	
$\chi^{(5)}$	5	1	-1	0	0	
$\chi_+^{(3)}$	3	-1	0	τ	τ'	
$\chi_-^{(3)}$	3	-1	0	τ'	τ	
χ	6	-2	0	1	1	

angegeben werden (ohne die Zeile für χ). Dabei ist $\tau = \bigl(1 + \sqrt{5}\bigr)/2$ der goldene Schnitt und $\tau' = 1 - \tau$ sein algebraisch Konjugiertes.

(a) Rechnen Sie die Orthogonalitätsrelationen der Tafel nach.

(b) Bestimmen Sie anhand der Tafel, welche der irreduziblen Darstellungen treu sind.

(c) Erklären Sie, warum die Isokaedergruppe keine 3-dimensionalen Gittersymmetrien liefern kann (wieder nur anhand der Tafel).

(d) Der letzte Charakter χ der Tafel ist offensichtlich nicht irreduzibel. Wie setzt er sich zusammen? **(4 Punkte)**

Abgabe bis Montag, 14.7.2025, 12 Uhr!