

Elementare Zahlentheorie

Präsenzübung am 14.10. zum Übungsblatt 1

Aufgabe 1. Zeigen Sie folgende Aussagen im Ring $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ der ganzen Zahlen. Geben Sie in jedem Schritt das verwendete Axiom an (siehe Vorlesung § 1 Satz 1).

a) $\forall a \in \mathbb{Z} : \quad 0 \cdot a = 0$

b) $\forall a \in \mathbb{Z} : \quad (-1) \cdot a = -a$

Aufgabe 2. Seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Nach Definition ist $a < b$ genau dann wenn ein $x \in \mathbb{N}$ existiert mit $a + x = b$. Wir definieren $a > b$ durch $b < a$. Beweisen Sie die Aussage

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : \quad a > b \Rightarrow a + c > b + c.$$

Aufgabe 3. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, daß für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Aufgabe 4. Teilt eine Primzahl p ein Produkt $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$ aus n natürlichen Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_n$, so teilt p einen der Faktoren. Beweisen Sie diese Aussage. (Hinweis: Der Fall $n = 2$ heißt *Fundamentallemma*. Dieses wurde in der Vorlesung bewiesen und kann benutzt werden.)