Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld
Joa Weber

WS 2010/11

Elementare Zahlentheorie

Präsenzübung am 28. Oktober

Notation. Mit $\mathbb{P}$ bezeichnen wir die Menge der Primzahlen und mit $\tau(a)$ die Anzahl aller positiven Teiler der Zahl $a \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Aufgabe 1. Jede natürliche Zahl $n > 1$ besitzt einen kleinsten (positiven) Teiler $t > 1$. Zeigen Sie:

$$n \in \mathbb{P} \quad \Leftrightarrow \quad n < t^2.$$

Aufgabe 2. Zeigen Sie, daß für jede natürliche Zahl a gilt:

$$a = b^2 \text{ mit } b \in \mathbb{N} \qquad \Leftrightarrow \qquad \tau(a) \text{ ist ungerade.}$$

Aufgabe 3. Zeigen Sie, daß für jede natürliche Zahl a gilt:

$$P(a) = a^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad (a = 1) \text{ oder } (a = p^3 \text{ mit } p \in \mathbb{P}) \text{ oder } (a = pq \text{ mit } p, q \in \mathbb{P}).$$

Aufgabe 4. Beweisen Sie folgende Aussage: Eine natürliche Zahl a mit genau einem Primteiler (also $a = p^m$ mit $p \in \mathbb{P}$ und $m \in \mathbb{N}$) ist niemals vollkommen.

Aufgabe 5. Sei a eine ganze Zahl. Zeigen Sie, daß gilt

$$\mathrm{ggT}(a, a) = a.$$

Aufgabe 6. Berechnen Sie sowohl mittels Primzerlegung als auch mit dem Euklidischen Algorithmus

$$\mathrm{ggT}(111, 77), \qquad \mathrm{ggT}(27, -34), \qquad \mathrm{ggT}(-52, -26).$$

Aufgabe 7. Sei $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, daß gilt

$$\mathrm{ggT}(ca, cb) = |c| \, \mathrm{ggT}(a, b).$$