

Elementare Zahlentheorie

Präsenzübung am 4. November

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die Lösung $(r, s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ der Gleichung $\text{ggT}(27, 24) = r \cdot 27 + s \cdot 24$.

Aufgabe 2. Sei $n > 2$ eine natürliche Zahl. Beweisen Sie: Jeder Primteiler p von $n! + 1$ ist strikt größer als n . Jeder Primteiler p von $n! - 1$ ist strikt größer als n .

Aufgabe 3. Finden Sie Beispiele für teilerfremde ganze Zahlen a_1, a_2, a_3 , welche nicht paarweise teilerfremd sind.

Aufgabe 4. Beweisen Sie, daß für alle ganzen Zahlen a und b gilt

$$\text{ggT}(a, b) \cdot \text{kgV}[a, b] = |ab|.$$

(Hinweis: Kanonische Primzerlegung und “Minimum-Maximumregel” $\min\{r, s\} + \max\{r, s\} = r + s$ für $r, s \in \mathbb{Z}$.)

Aufgabe 5. Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Die Elemente der Menge $M_n := \{1 + d(n!) \mid 1 \leq d \leq n\}$ sind paarweise teilerfremd. Folgern Sie die Existenz unendlich vieler Primzahlen.