Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld
Joa Weber

WS 2010/11

Elementare Zahlentheorie

Präsenzübung am 25. November

Aufgabe. (a) Welchen Rest lässt 4444^{4444} bei Division durch 11?
(b) Welchen Rest lässt 3400^{3333} bei Division durch 9?
(c) Welchen Rest lässt 6800^{3333} bei Division durch 3?

Binomialkoeffizienten

Per definitionem gilt

$$0! = 1, \qquad n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n, \; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Die Binomialkoeffizienten sind definiert durch

$$\binom{n}{0} = 1, \; \forall n \in \mathbb{N}_0, \qquad \binom{n}{\nu} = \frac{n(n-1)\cdots(n-\nu+1)}{\nu!}, \; \forall n \in \mathbb{N}_0, \forall \nu \in \mathbb{N}.$$

(i) Zeigen Sie, daß für $n, \nu \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\binom{n}{\nu} = \begin{cases} \frac{n!}{\nu!(n-\nu)!} & , 0 \leq \nu \leq n, \\ 0 & , \nu > n. \end{cases}$$

(ii) Zeigen Sie: Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $\nu \in \mathbb{N}$ gilt die Identität

$$\binom{n}{\nu-1} + \binom{n}{\nu} = \binom{n+1}{\nu}.$$

(iii) Beweisen Sie **(Binomischer Lehrsatz)**: Für alle (reellen) Zahlen a, b und jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(a+b)^n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a^{n-\nu} b^{\nu} = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \ldots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n.$$

(Bemerkung: Per definitionem ist $a^0 = 1$ für jede Zahl a.)

(iv) Folgern Sie: Für $n, \nu \in \mathbb{N}_0$ ist der Binomialkoeffizient $\binom{n}{\nu}$ eine natürliche Zahl oder Null.