Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld
Joa Weber

WS 2010/11

Elementare Zahlentheorie

Präsenzübung 9 am 9. Dezember

Aufgabe 1. Sei $p \in R$ ein Primelement im Integritätsring R und $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$ mit $n \geq 2$. Beweisen Sie:

$$p \mid a_1 a_2 \ldots a_n \qquad \Rightarrow \qquad p \mid a_1 \quad \vee \quad p \mid a_2 \quad \vee \quad \ldots \quad \vee \quad p \mid a_n.$$

Aufgabe 2. Zeigen Sie, daß die Gleichheit $\mathrm{ggT}(0,0) = \{0\}$ in jedem Integritätsring R gilt.

Aufgabe 3. Sei R ein Integritätsring und seien $a, b \in R$. Zeigen Sie:

$$a \in \mathrm{ggT}(a,a)$$

und

$$a \mid b \qquad \Rightarrow \qquad a \in \mathrm{ggT}(a,b).$$

Aufgabe 4. Sei R ein Integritätsring mit ggT und seien die Elemente $m_1, m_2, \ldots, m_n \in R$ paarweise teilerfremd mit $n \geq 2$. Für $j = 1, \ldots, n$ definieren wir

$$a_j := m_1 \cdot \ldots \cdot \widehat{m_j} \cdot \ldots \cdot m_n,$$

wobei die Notation $\widehat{m}$ bedeutet, daß das Element m im Produkt ausgelassen wird. Zeigen Sie, daß a_j und m_j teilerfremd sind für jedes $j = 1, \ldots, n$.