Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld
Joa Weber

WS 2010/11

Elementare Zahlentheorie

Präsenzübung 10 am 16. Dezember

Kleinste gemeinsame Vielfache

Definition. Sei R ein Integritätsring und seien $a, b \in R$. a) Ein Element $\ell \in R$ heißt **ein kleinstes gemeinsames Vielfaches (kgV) von $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ in $\boldsymbol{R}$**, falls gilt:

(kgV1) $a \mid \ell$ und $b \mid \ell$,

(kgV2) jedes gemeinsame Vielfache v von a und b wird von ℓ geteilt: $\ell \mid v$.

b) Die Menge aller kleinsten gemeinsamen Vielfachen von a und b bezeichnen wir mit $\mathbf{kgV}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$.

Aufgabe 1. Gegeben ein Integritätsring R und ein Element $a \in R$, bestimmen Sie die Mengen $\mathrm{kgV}[0,0]$ und $\mathrm{kgV}[a,0]$.

Aufgabe 2. Zeigen Sie: Sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ zwei Ideale in einem K1-Ring R, dann ist auch $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ ein Ideal in R.

Aufgabe 3. Sei R ein Integritätsring und ein Hauptidealring. Zeigen Sie, daß für $a, b, \ell \in R$ gilt

$$Ra \cap Rb = R\ell \qquad \Leftrightarrow \qquad \ell \in \mathrm{kgV}[a,b].$$

Aufgabe 4. Wenn sich die Schüler einer Klasse in Dreier- oder Viererreihen aufstellen, bleibt jedesmal ein Schüler übrig. Bei Aufstellung in Fünferreihe bleibt niemand übrig. Wie viele Schüler hat die Klasse?

Aufgabe 5. Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und $\mathfrak{a} \neq R$ ein Ideal in R. Zeigen Sie, daß für die Restklassenabbildung $R \to R/\mathfrak{a} : r \mapsto \overline{r} := r + \mathfrak{a}$ gilt

$$\overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b}, \qquad \overline{a \cdot b} = \overline{a} \cdot \overline{b},$$

für alle $a, b \in R$ und, daß $\overline{0}$ bzw. $\overline{1}$ das Null- bzw. das Einselement von $R/\mathfrak{a}$ ist.