Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld
Joa Weber

WS 2010/11

Elementare Zahlentheorie

Präsenzübung 11 am 13. Januar 2011

Gruppeneigenschaften. Sei G eine Gruppe in multiplikativer Schreibweise und seien $a, b, c \in G$, dann gilt

1) Eindeutigkeit des neutralen Elements e

2) Kürzungsregeln:

$$\begin{array}{lccc} \text{A)} & ab = ac & \Rightarrow & b = c \\ \text{B)} & ba = ca & \Rightarrow & b = c \end{array}$$

3) Eindeutigkeit der Inversen: Zu jedem $a \in G$ existiert genau ein $\tilde{a} \in G$ mit $a\tilde{a} = \tilde{a}a = e$.

4) A) Transitive Linkswirkung von G auf G:

$$\forall f, g \in G \quad \exists!\, l \in G: \qquad lf = g$$

4) B) Transitive Rechtswirkung von G auf G:

$$\forall f, g \in G \quad \exists!\, r \in G: \qquad fr = g$$

5) $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ und $(a^{-1})^{-1} = a$

6) Potenzregeln:

$$\forall m, n \in \mathbb{Z}: \quad a^{m+n} = a^m a^n, \quad (a^m)^n = a^{mn}$$

Aufgabe 1. Beweisen Sie die Gruppeneigenschaften 1), 2B), 4B) und 5).

Aufgabe 2. Zeigen Sie, daß jede Untergruppe H einer Gruppe G selbst eine Gruppe ist (bzgl. der Verknüpfung von G).

Aufgabe 3. Beweisen Sie die Aussagen:

a) Sei G eine Gruppe und $g \in G$. Dann ist $[g] := \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ eine Untergruppe von G

b) Jede zyklische Gruppe ist abelsch.

Aufgabe 4. Sei G eine Gruppe und H eine Untergruppe von G. Zeigen Sie, daß Kongruenz modulo H eine Äquivalenzrelation auf G definiert.

Bitte wenden..

Die symmetrische Gruppe S_n

Definition I. Für $n \geq 1$ sei $\boldsymbol{S_n}$ die Menge der bijektiven Abbildungen (Permutationen) der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ in sich. Mit der Hintereinanderausführung von Abbildungen als Verknüpfung wird S_n zu einer Gruppe, genannt **symmetrische Gruppe vom Grad $\boldsymbol{n}$**.

Definition II. Sei G eine Gruppe in multiplikativer Schreibweise. Eine Untergruppe H von G heißt **normal** oder **Normalteiler von $\boldsymbol{G}$**, falls gilt

$$h \in H \qquad \Rightarrow \qquad \forall g \in G: \; ghg^{-1} \in H$$

Aufgabe 5. a) Geben Sie eine Untergruppe H von S_3 an, die kein Normalteiler in S_3 ist.

b) Bestimmen Sie Elemente $a, b, c, d, f \in S_3$, so daß $a \equiv b(H)$, aber $ca \not\equiv cb(H)$, und $d \equiv f(H)$, aber $d^{-1} \not\equiv f^{-1}(H)$.