Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld
Joa Weber

WS 2010/11

Elementare Zahlentheorie

Übungsblatt 1

Abgabe: In den Übungsgruppen am 21.10. und 22.10.

Vermerken Sie bitte auf jeder Abgabe: **Name, Matrikelnummer, Übungsgruppe**
Präsenzübungsblätter können zur Lösung verwendet werden

Aufgabe 1. Zeigen Sie folgende Aussagen im Integritätsring $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ der ganzen Zahlen. Geben Sie in jedem Schritt das verwendete Axiom an (siehe Vorlesung §1, Satz 1 und Satz 3).

a) $\forall a, b \in \mathbb{Z} \quad \exists! x \in \mathbb{Z}: \quad a + x = b$ (Schreibweise $x = b - a$)

b) Kürzungsregel: $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0: \quad ab = ac \;\Rightarrow\; b = c$

Notation: $\exists! x$ bedeutet "Es existiert ein *eindeutiges* Element x".

Aufgabe 2. Seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Nach Definition ist $a < b$ genau dann wenn ein $x \in \mathbb{N}$ existiert mit $a + x = b$. Wir definieren $a > b$ durch $b < a$. Beweisen Sie folgende Aussagen.

1) $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}: \quad a > b$ und $b > c \;\Rightarrow\; a > c$

2) $\forall a, b \in \mathbb{Z}: \quad a > 0$ und $b < 0 \;\Rightarrow\; ab < 0$

Prinzip der vollständigen Induktion mit erweiterter Induktionsvoraussetzung. Sei B eine Teilmenge der ganzen Zahlen, die wenigstens ein Element b_0 enthält. Weiter gelte für jedes $k \in \mathbb{N}_0$

$$b_0, b_0 + 1, \ldots, b_0 + k \in B \;\Rightarrow\; b_0 + k + 1 \in B.$$

Dann enthält B bereits alle ganzen Zahlen, die größer oder gleich b_0 sind: $\mathbb{Z}_{\geq b_0} \subset B$.

Aufgabe 3. Beweisen Sie das Prinzip der vollständigen Induktion mit erweiterter Induktionsvoraussetzung. (Hinweis: Das Prinzip der vollständigen Induktion in der Formulierung von §1 Satz 4 b) kann zur Lösung verwendet werden.)