Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld
Joa Weber

WS 2010/11

Elementare Zahlentheorie

Übungsblatt 2

Abgabe: In den Übungsgruppen am 28.10. und 29.10.

Vermerken Sie bitte auf jeder Abgabe: **Name, Matrikelnummer, Übungsgruppe**
Präsenzübungsblätter können zur Lösung verwendet werden

Aufgabe 1. a) Seien a, b, c Ziffern aus der Menge $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ und $a \neq 0$. Zeigen Sie: 13 teilt die natürliche Zahl *abcabc* (Zifferndarstellung).
b) Sei $n > 1$ eine natürliche Zahl, die $(n-1)! + 1$ teilt. Zeigen Sie, daß n eine Primzahl sein muß. ($n!$ ist definiert als das Produkt $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$.)

Aufgabe 2. Folgern Sie aus der Existenz und Eindeutigkeit der Primzerlegung das **Fundamentallemma**: Teilt eine Primzahl p ein Produkt ab von zwei natürlichen Zahlen a und b, so teilt p einen der Faktoren.
(Bemerkung: Es gibt einen Beweis der Eindeutigkeit der Primzerlegung von Zermelo, welcher das Fundamentallemma nicht benutzt – im Gegensatz zu dem in der Vorlesung gegebenen Beweis. Die Aufgabe ist daher sinnvoll.)

Aufgabe 3. Zeigen Sie, daß die Menge $E := \{4k+1 \mid k \in \mathbb{N}_0\}$ bezüglich Multiplikation abgeschlossen ist und ein neutrales Element enthält. Es macht also Sinn ein Element $c \in E$ als *in E unzerlegbar* zu bezeichnen, falls gilt

$$c = ab \text{ mit } a, b \in E \quad \Rightarrow \quad a = 1 \text{ oder } b = 1.$$

Zeigen Sie, daß jedes Element von E als endliches Produkt von in E unzerlegbaren Faktoren dargestellt werden kann. Beweisen oder widerlegen Sie die Eindeutigkeit so einer Darstellung. Ist E abgeschlossen unter Addition?

Aufgabe 4. Sei $a > 1$ eine natürliche Zahl und $\tau(a)$ die Anzahl ihrer positiven Teiler d. Diese seien der Größe nach geordnet:

$$1 =: d_1 < d_2 < \ldots < d_{s-1} < d_s := a, \quad \text{wobei } s = \tau(a).$$

Zeigen Sie, daß für gerades $s = 2\ell$ gilt

$$a = d_1 d_s = d_2 d_{s-1} = \cdots = d_\ell d_{\ell+1}$$

während für ungerades $s = 2\ell + 1$ gilt

$$a = d_1 d_s = d_2 d_{s-1} = \cdots = d_\ell d_{\ell+2} = (d_{\ell+1})^2.$$