Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld
Joa Weber

WS 2010/11

Elementare Zahlentheorie

Übungsblatt 4

Abgabe: In den Übungsgruppen am 11.11. und 12.11.

Vermerken Sie bitte auf jeder Abgabe: **Name, Matrikelnummer, Übungsgruppe**
Präsenzübungsblätter können zur Lösung verwendet werden

Aufgabe 1. Zahlen der Form $F_n = 2^{2^n} + 1$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ heißen *Fermat-Zahlen.* Sei $G_n := F_n - 2$. Beweisen Sie:
(a) Es gilt $F_n G_n = G_{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.
(b) Es gilt $\prod_{k=0}^{n} F_k = G_{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.
(c) Die Fermat-Zahlen sind paarweise teilerfremd.
(d) Folgerung aus (c): Es gibt unendlich viele Primzahlen.
(Hinweis zu (d): Kriterium für paarweise Teilerfremdheit.)

Aufgabe 2. Zeigen Sie, daß für ganze Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gilt

$$\mathrm{ggT}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \mathrm{ggT}(a_1, \mathrm{ggT}(a_2, \ldots, a_n)).$$

Aufgabe 3. Seien $a, b \in \mathbb{N}$ teilerfremd und sei $c \in \mathbb{N}_0$ mit $a \mid c$ und $b \mid c$. Beweisen Sie: $(ab) \mid c$.

Aufgabe 4. a) Seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ zwei Ideale in $\mathbb{Z}$. Zeigen Sie: $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ ist wieder ein Ideal in $\mathbb{Z}$.
b) Zeigen Sie: Für $a, b, v \in \mathbb{Z}$ gilt

$$v \in \mathbb{N}_0 \text{ und } \mathbb{Z}v = \mathbb{Z}a \cap \mathbb{Z}b \qquad \Leftrightarrow \qquad v = \mathrm{kgV}[a, b].$$