

Elementare Zahlentheorie

Übungsblatt 5

Abgabe: In den Übungsgruppen am 18.11. und 19.11.

Vermerken Sie bitte auf jeder Abgabe: **Name, Matrikelnummer, Übungsgruppe**
Präsenzübungsblätter können zur Lösung verwendet werden

Aufgabe 1. Beweisen Sie direkt (ohne z.B. den Satz von Dirichlet zu verwenden): Es gibt unendlich viele Primzahlen der Form $4k + 3$, $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2. a) Zeigen Sie, daß sich der ggT von endlich vielen ganzen Zahlen a_1, a_2, \dots, a_k nicht ändert, wenn man zu einer Zahl eine beliebige Linearkombination der übrigen Zahlen mit ganzen Koeffizienten addiert: Für beliebige $x_1, \dots, x_{k-1} \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\text{ggT} \left(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k + \sum_{i=1}^{k-1} x_i a_i \right) = \text{ggT}(a_1, a_2, \dots, a_k).$$

b) Gegeben $a, b \in \mathbb{N}$, beweisen Sie: Aus $a^2 \mid b^2$ folgt $a \mid b$.

Aufgabe 3. Gegeben $a, b, c \in \mathbb{N}$, beweisen Sie: Falls $\text{ggT}(a, b, c) = 1$ und $ab = c^2$, dann sind a und b Quadratzahlen (d.h. $a = m^2$ und $b = n^2$ für $n, m \in \mathbb{N}$).

Aufgabe 4. Finden Sie alle Lösungen der folgenden diophantischen Gleichungen.

$$(a) \quad 21x + 35y = 217, \quad (b) \quad 41053x + 33977y = 1415627.$$