

Elementare Zahlentheorie

Übungsblatt 6

Abgabe: In den Übungsgruppen am 25.11. und 26.11.

Vermerken Sie bitte auf jeder Abgabe: **Name, Matrikelnummer, Übungsgruppe**
Präsenzübungsblätter können zur Lösung verwendet werden

Aufgabe 1. Sei φ die Eulersche Funktion.

- a) Bestimmen Sie $\varphi(n)$ für $n = 13, 169, 170$.
- b) Die Zahl $n = 5917$ ist das Produkt zweier Primzahlen und es gilt $\varphi(n) = 5760$. Bestimmen Sie die beiden Primfaktoren von n .
- c) Zeigen Sie: Für jede natürliche Zahl n gibt es unendlich viele $a \in \mathbb{N}$ mit $n \mid \varphi(a)$.

Aufgabe 2. (i) Seien $m, n \in \mathbb{N}$, so daß jeder Primteiler von m auch ein Primteiler von n ist. Zeigen Sie, daß gilt $\varphi(mn) = m\varphi(n)$.

- (ii) Für welche $m, n \in \mathbb{N}$ gilt $m\varphi(n) = n\varphi(m)$?
- (iii) Zeigen Sie: Für $d, n \in \mathbb{N}$ mit $d \mid n$ gilt $\varphi(d) \mid \varphi(n)$.
- (iv) Zeigen Sie: Für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $\text{ggT}(m, n) \neq 1$ gilt $\varphi(mn) > \varphi(m)\varphi(n)$.
- (v) Für welche $m, n \in \mathbb{N}$ gilt $\varphi(mn) = \varphi(n)$?

Aufgabe 3. Wie immer ist die Angabe des Lösungsweges teil der Aufgabenstellung:

- a) Erstellen Sie die Additions- und die Multiplikationstabelle (**kleines Einmaleins**) der 4-adischen Ziffern. Bestimmen Sie die 4-adische Darstellung der im Dezimalsystem durch 418 repräsentierten natürlichen Zahl.
- b) Bestimmen Sie die 6-adische Darstellung von 418 direkt aus Ihrer 4-adischen Darstellung (also durch fortgesetzte Division der 4-adischen Darstellung durch $(12)_4 = 6$ im 4-adischen Zahlensystem).
- c) Zur Kontrolle von b) wandeln Sie 418 vom Dezimalsystem ins 6-adische Zahlensystem um.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, daß jede natürliche Zahl n genau eine Darstellung der Gestalt

$$n = \sum_{\mu=1}^N c_{\mu} \cdot \mu!$$

besitzt, wobei

$$N \in \mathbb{N}, \quad c_1, \dots, c_N \in \mathbb{N}_0, \quad c_N \neq 0$$

und $c_{\mu} \in \{0, \dots, \mu\}$ für $\mu = 1, \dots, N$.