

# Elementare Zahlentheorie

## Übungsblatt 9

Abgabe: In den Übungsgruppen am 16.12. und 17.12.

Vermerken Sie bitte auf jeder Abgabe: **Name, Matrikelnummer, Übungsgruppe**  
Präsenzübungsblätter können zur Lösung verwendet werden

**Aufgabe 1.** a) Sei  $u \in R$  unzerlegbar im Integritätsring  $R$  und  $a \in R$  keine Einheit in  $R$ . Beweisen Sie:

$$a \mid u \quad \Leftrightarrow \quad a \sim u.$$

b) Zeigen Sie, daß jeder Körper  $K$  ein Hauptidealring ist. (Hinweis: Bestimmen Sie alle Ideale.)

**Aufgabe 2.** Seien  $a, b, c, d$  Elemente des Integritätsringes  $R$ . Beweisen Sie:

$$a \sim b \quad \wedge \quad c \sim d \quad \Rightarrow \quad ac \sim bd$$

und

$$a \sim b \quad \wedge \quad ac \sim bd \quad \wedge \quad a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad c \sim d.$$

**Aufgabe 3.** Sei  $R$  ein Integritätsring mit ggT und seien  $a, b, c \in R$ . Zeigen Sie:

$$b \sim c \quad \Rightarrow \quad \text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(a, c).$$

Gilt auch die umgekehrte Richtung der Implikation? Beweisen Sie Ihre Antwort.