

Elementare Zahlentheorie

Übungsblatt 10

Abgabe: In den Übungsgruppen am 13.01. und 14.01.2011

Vermerken Sie bitte auf jeder Abgabe: **Name, Matrikelnummer, Übungsgruppe**
Präsenzübungsblätter können zur Lösung verwendet werden

Hinweis. Die Notation kgV wird auf dem Präsenzübungsblatt 10 eingeführt.

Satz I. (Eindeutigkeit bis auf Assoziiertheit) Sei R ein Integritätsring und seien $a, b \in R$. Ist ℓ ein kgV von a und b , so gilt

$$\text{kgV}[a, b] = \{r \in R \mid r \sim \ell\}.$$

Aufgabe 1. Beweisen Sie Satz I.

Satz II. Sei R ein Integritätsring und $a, b \in R$. Ist ℓ ein kgV und d ein ggT von a und b , so gilt

$$\ell d \sim ab.$$

Aufgabe 2. Beweisen Sie Satz II.

Aufgabe 3. a) Eine Bäuerin hat Eier in ihrem Korb. Entnimmt sie sie zu fünf, bleiben vier übrig, entnimmt sie sie zu sechsen, bleiben fünf übrig, und entnimmt sie sie zu sieben, bleibt kein einziges übrig. Wieviele Eier hat sie im Korb, wenn höchstens 500 hineinpassen?

b) Eine Bäuerin hat Eier in ihrem Korb. Entnimmt sie sie paarweise, bleibt ein Ei übrig. Entnimmt sie sie zu dreien, bleiben zwei übrig. Entnimmt sie sie zu vieren, bleiben drei übrig. Entnimmt sie sie zu fünf, bleiben vier übrig, entnimmt sie sie zu sechsen, bleiben fünf übrig, und entnimmt sie sie zu sieben, bleibt kein einziges übrig. Wieviele Eier hat sie im Korb, wenn höchstens 500 hineinpassen?

Aufgabe 4. a) Zeigen Sie, daß ein endlicher Integritätsring ein Körper ist.

b) Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie, daß n genau dann eine Primzahl ist, wenn $\mathbb{Z}_n$ ein Körper ist.

Fröhliche Weihnachten und einen guten Rutsch!