Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld
Joa Weber

WS 2010/11

Elementare Zahlentheorie

Übungsblatt 11

Abgabe: In den Übungsgruppen am 20.01. und 21.01.2011

Vermerken Sie bitte auf jeder Abgabe: **Name, Matrikelnummer, Übungsgruppe**
Präsenzübungsblätter können zur Lösung verwendet werden

Zur Erinnerung: **Die Evaluation der Vorlesung ist diese Woche freigeschaltet**

Aufgabe 1. a) Zeigen Sie, daß die Menge der Einheiten R^* eines K1-Ringes R eine abelsche Gruppe bezüglich Multiplikation ist.

b) Beweisen Sie die Gruppeneigenschaften 2A), 3), 4A) und 6) auf dem aktuellen Präsenzübungsblatt.

c) Sei G eine Gruppe und H eine Untergruppe von G. Zeigen Sie, daß für $a, b, c \in G$ gilt

$$a \equiv b(H) \qquad \Rightarrow \qquad a \circ c \equiv b \circ c(H)$$

Erinnerung: Per definitionem ist $a \equiv b(H)$ genau dann, wenn $ab^{-1} \in H$.

Aufgabe 2. (**Die symmetrische Gruppe S_n**) Für $n \geq 1$ sei S_n die Menge der bijektiven Abbildungen (Permutationen) der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ in sich. Zeigen Sie:

a) Mit der Hintereinanderausführung von Abbildungen als Verknüpfung wird S_n zu einer Gruppe.

b) Es gilt $\mathrm{ord}(S_n) = n!$.

c) Für $n \geq 3$ ist S_n nicht abelsch (es ist nützlich dies zuerst für S_3 zu zeigen).

Aufgabe 3. Sei G eine zyklische Gruppe der Ordnung n. Zeigen Sie:

a) Sei $a \in G$ mit $[a] = G$ und sei $b := a^k$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$[b] = G \ \ (\text{“}b \text{ erzeugt } G\text{”}) \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{ggT}(k, n) = 1.$$

b) Ist $n \geq 3$, so ist die Anzahl der *erzeugenden* Elemente von G gerade.