

# AUSGEWÄHLTE KAPITEL DER ZAHLENTHEORIE

## 3. ÜBUNGSBLATT

PROF. DR. HENNING KRAUSE  
DR. JULIA SAUTER

**Aufgabe 1.** Finde alle Lösungen der folgenden Gleichungen in den natürlichen Zahlen, das heißt alle  $x, y \in \mathbb{N}$ , so dass

$$(a) 21x + 35y = 217, \quad (b) 12x - 501y = 33.$$

Zusatz: Überlege, für welche  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  man nur endlich viele  $x, y \in \mathbb{N}$  mit  $ax + by = c$  findet.

**Aufgabe 2.** Es seien  $a, b, c$  drei ganze Zahlen und  $d = \text{ggT}(a, b, c)$  der größte gemeinsame Teiler.

- (1) Zeige  $d = \text{ggT}(\text{ggT}(a, b), c)$ .
- (2) Berechne  $d = \text{ggT}(260, 910, 364)$  und finde  $x, y, z \in \mathbb{Z}$  mit

$$d = 260x + 910y + 364z.$$

**Aufgabe 3.**

- (1) Das Sieb des Eratosthenes nimmt eine Liste  $2, \dots, n$  von natürlichen Zahlen. Angefangen mit der kleinsten Zahl 2 werden alle Zahlen, die größer als und durch 2 teilbar sind durchgestrichen. Dann wird die nächstkleine nicht gestrichene Zahl 3 genommen und alle größeren durch 3 teilbaren Zahlen gestrichen, etc.. Wenn man mit diesem Verfahren alle Zahlen bis  $n$  durchgegangen ist, bleiben nur noch die Primzahlen stehen. Wende das Sieb des Eratosthenes auf die ganzen Zahlen  $2, \dots, 200$  an. (Benutze die Rückseite als Vorlage.)
- (2) Es sei  $n$  eine zusammengesetzte Zahl. Zeige, dass der kleinste Primteiler von  $n$  kleiner gleich  $\sqrt{n}$  ist. Folgere, dass es beim Sieb des E. für  $2, \dots, n$  ausreicht, nur alle natürlichen Zahlen kleiner gleich  $\sqrt{n}$  mit dem Algorithmus durchzugehen (i.e. die bis dahin noch nicht gestrichenen Zahlen sind alles Primzahlen).

**Aufgabe 4.**

- (1) Zeige, dass die folgende Gleichung gilt

$$x^k - 1 = (x - 1)(x^{k-1} + x^{k-2} + \dots + x + 1)$$

für alle  $x \in \mathbb{Z}$  und  $k \in \mathbb{N}$ .

- (2) Es sei  $n \in \mathbb{N}$ . Zeige, falls  $n$  keine Primzahl ist, dann ist  $2^n - 1$  keine Primzahl. (Hinweis: Setze die Aussage in (1) voraus und benutze sie im Beweis.)

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170
171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190
191	192	193	194	195	196	197	198	199	200