

AUSGEWÄHLTE KAPITEL DER ZAHLENTHEORIE
4. ÜBUNGSBLATTPROF. DR. HENNING KRAUSE
DR. JULIA SAUTER

Aufgabe 1. Berechne den größten gemeinsamen Teiler und das kleinste gemeinsame Vielfache mit Hilfe der Primfaktorzerlegung für die folgenden Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$.

(1) $a = 616, b = 220,$

(2) $a = 9^{10} \cdot 40^{987} \cdot 42^{65}, b = 45^{123} \cdot 22^{45} \cdot 39^{678}.$

Aufgabe 2. Finde alle primitiven pythagoreischen Tripel (a, b, c) mit $0 < c < 30$.

Aufgabe 3. Es sei (a, b, c) ein pythagoreisches Tripel. Zeige, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

(1) $c - b = 1,$

(2) Es gibt ein $d \in \mathbb{N}$, so dass gilt $a = 2d + 1, b = 2d^2 + 2d, c = 2d^2 + 2d + 1$.

Folgere, dass man jede ungerade Zahl t als Teil eines pythagoreischen Tripels (t, b, c) mit $c - b = 1$ bekommen kann.

Aufgabe 4. Es sei $m \in \mathbb{N}$. Finde $x \in \{0, \dots, m - 1\}$, so dass gilt:

(1) $65^{2016} \equiv x \pmod{m}$ mit $m = 12$.

(2) $64^{2016} + (-11)^{2016} \equiv x \pmod{m}$ mit $m = 10$.