AUSGEWÄHLTE KAPITEL DER ZAHLENTHEORIE
6. ÜBUNGSBLATT

PROF. DR. HENNING KRAUSE
DR. JULIA SAUTER

Aufgabe 1. (a) Finde alle $x \in \mathbb{Z}$, die die folgenden simultanen Kongruenzen lösen.

(1) $x \equiv 7 \pmod 3,\ x \equiv 8 \pmod 4,\ x \equiv 9 \pmod 5,\ x \equiv 10 \pmod 7$
(2) $x \equiv 2 \pmod 6,\ x \equiv 2 \pmod 5,\ x \equiv 5 \pmod 9.$

(b) Eine Mutter zahlt ihren drei Kindern Paul, Sofie und Alex die gleiche Summe Taschengeld pro Monat. Paul kauft nur Sammelkarten, jede Packung kostet 12 Euro, er behält 9 Euro über.
Sofie kauft Bücher zu je 18 Euro das Stück, sie behält 15 Euro übrig.
Alex kauft Computerspiele zu je 30 Euro das Stück, er behält auch 15 Euro übrig.
Wieviel Taschengeld bekommt jedes Kind im Monat?

Aufgabe 2. (a) Schreibe die Restklassen modulo 3^n nebeneinander: Zuerst für $n = 0$, dann darunter für $n = 1$, dann darunter für $n = 2$ und darunter für $n = 3$. Verbinde zwei Restklassen, wann immer eine Restklasse in einer anderen enthalten ist und keine dritte dazwischen liegt.
(b) Es seien $a \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$. Zeige a ist idempotent modulo m (das heißt $a^2 \equiv a \pmod m$) genau dann, wenn $m|a(a-1)$ gilt.
Insbesondere ist 6 nur idempotent modulo welcher $m \in \mathbb{N}$?

Aufgabe 3. Zeige durch Reduktion der Diophantischen Gleichung, dass es keine Lösungen in $\mathbb{Z}$ gibt.

(1) $x^3 - 7x^2y + 14x^2 - 35y - 2 = 0$
Hinweis: Reduziere zum Beispiel modulo 7.
(2) $x^5y^9z + 9xy^5z^{13} + 11x^{17}z^5 - 201x^5z^9 + 5 = 0$
Hinweis: Reduziere zum Beispiel modulo 10. Hierbei ist es hilfreich durch Ausprobieren zu beweisen, dass $x^5 \equiv x \pmod{10}$ für alle $x \in \{0, 1, \dots, 9\}$ gilt.

Abgabe: Freitag, 27. Mai 2016, bis 10.15 Uhr in der Vorlesung.

Aufgabe 4. Kreuze die richtigen Aussagen an. Wenn du unsicher bist, schreibe zwei nicht triviale Zahlenbeispiele für deine Hypothese auf und mache kein Kreuz, dann wird dieser Teil mit $0,25$ Punkten bewertet. Es seien $a, b \in \mathbb{Z}$ und $n, m \in \mathbb{N}$.

	wahr	falsch
(1) Die simultane Kongruenz $x \equiv 1 \pmod 2, x \equiv 2 \pmod 3, x \equiv 3 \pmod 4$ ist lösbar.	☐	☐
(2) Die Gleichung $13x - 11y = 1$ hat unendlich viele Lösungen $x, y \in \mathbb{N}_0$.	☐	☐
(3) Die Gleichung $x^2 - 2 = 0$ hat modulo 7 eine Lösung, aber keine in $\mathbb{Z}$.	☐	☐
(4) Hat eine Diophantische Gleichung eine Lösung modulo m, so auch modulo m^2.	☐	☐
(5) Es gilt $[a]_5 = [a]_{15} \cup [a+5]_{15} \cup [a+10]_{15}$.	☐	☐
(6) Wenn $a \equiv 1 \pmod n, b \equiv 1 \pmod m$ gilt, dann ist $ab \equiv 1 \pmod{nm}$.	☐	☐
(7) Die Kongruenz $20x \equiv 11 \pmod{33}$ ist lösbar in $\mathbb{Z}$.	☐	☐
(8) Es gibt kein $x \in \mathbb{Z}$ mit $5x^7 + 10x^2 + 1 = 0$.	☐	☐