GRUPPEN UND SYMMETRIEN
LÖSUNG ZU TRAININGSZETTEL I

JULIA SAUTER

Untergruppen und Gruppenhomomorphismen - abstrakte Beweisaufgaben.

Aufgaben zu Untergruppen: Es seien G eine Gruppe mit Einheit e und U und V zwei Untergruppen.

(1) Zeigen Sie, dass $U \cap V$ ebenfalls eine Untergruppe ist.
Bew: Da $e \in U, e \in V$ gilt, ist $e \in U \cap V$ und somit $U \cap V \neq \emptyset$.
Seien nun $x, y \in U \cap V$. Da U und V Untergruppen sind, gilt $xy^{-1} \in U$ und $xy^{-1} \in V$ und somit $xy^{-1} \in U \cap V$. Also ist nach dem UG-Krit. $U \cap V$ ebenfalls eine UG. $\square$

(2) Zeigen Sie, dass gUg^{-1} wieder eine Untergruppe ist.
Bew: Da $e \in U$ gilt, gilt auch $e = geg^{-1} \in gUg^{-1}$ und somit $gUg^{-1} \neq \emptyset$.
Seien nun $x, y \in gUg^{-1}$. Dann gibt es nach Definition $u, v \in U$ mit $x = gug^{-1}, y = gvg^{-1}$. Da U eine UG ist, gilt ebenfalls $uv^{-1} \in U$. Nun berechnen wir

$$xy^{-1} = (gug^{-1})(gvg^{-1})^{-1} = (gug^{-1})(gv^{-1}g^{-1}) = gu(gg^{-1})v^{-1}g^{-1} = g(uv^{-1})g^{-1} \in gUg^{-1}$$

da $uv^{-1} \in U$. Somit ist gUg^{-1} eine Gruppe nach dem UG-Krit. $\square$

(3) Es sei $C := \{g \in G \mid gx = xg\}$. Zeigen Sie, dass C eine Untergruppe von G ist.
Bew: Da $ex = xe$ für alle $x \in G$ gilt, ist $e \in C$ und somit $C \neq \emptyset$.
Seien nun $a, b \in C$. Dann gilt nach Definition (1.) $ax = xa$ und (2.) $bx = xb$ für alle $x \in G$. Durch Multiplikation mit b^{-1} von rechts und von links erhalten wir in (2.) erhalten wir (2.)' $xb^{-1} = b^{-1}x$ für alle $x \in G$. Nun gilt für alle $x \in G$:

$$(ab^{-1})x = a(b^{-1}x) = a(xb^{-1}) = (ax)b^{-1} = (xa)b^{-1} = x(ab^{-1}),$$

wobei wir bei der zweiten Gleichung (2.)' und bei der vierten Gleichheit (1.) und bei allen anderen die Assoziativität benutzt haben. Somit ist C eine UG nach dem UG-Krit. $\square$

Aufgaben zu Gruppenhomomorphismen: Es seien $f\colon G \to H$ und $g\colon H \to I$ zwei Gruppenhomomorphismen.

(4) Zeigen Sie, dass die Verknüpfung $g \circ f$ wieder ein Gruppenhomomorphismus ist.
Bew: Es seien $x, y \in G$. Da f ein GH ist, folgt $f(xy) = f(x)f(y)$. Nun wenden wir g an und erhalten $g \circ f(xy) = g(f(x)f(y))$. Da g ein GH ist, gilt $g(f(x)f(y)) = g(f(x))g(f(y)) = (g \circ f)(x)(g \circ f)(y)$. Zusammen erhalten wir

$$g \circ f(xy) = (g \circ f)(x)(g \circ f)(y)$$

Damit ist $g \circ f$ auch ein GH. $\square$

(5) Wir betrachten die Abbildung $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto 3x$. Beweisen Sie, dass f ein injektiver Gruppenhomomorphismus ist.
Bew: Es seien $x, y \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$f(x+y) = 3(x+y) = (3x) + (3y) = f(x) + f(y)$$

wobei die zweite Gleichung wegen der Distributivität in $\mathbb{Z}$ gilt. Damit ist f ein GH.
Sei nun $x \in \mathbb{Z}$ mit $f(x) = 0$. Das bedeutet $3x = 0$. In $\mathbb{Z}$ gilt aber: $ab = 0$ impliziert $a = 0$ oder $b = 0$. Da $3 \neq 0$ ist, muss $x = 0$ gelten. Das beweist $\mathrm{Kern(f)} = \{0\}$. Nach VL gilt dann, dass f ein injektiver GH ist. $\square$

(6) Sei $x \in G$ endlicher Ordnung. Zeigen Sie: $\mathrm{ord(f(x))} \in \mathbb{N}_{>0}$ und $\mathrm{ord(f(x))}$ ist ein Teiler von $\mathrm{ord(x)}$.
Hinweis: In VL10 wurde behandelt, dass für jede Gruppe G, $x \in G$ und $m \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt:

$$x^m = e \Rightarrow \mathrm{ord_G(x)\text{ teilt }m}$$

Bew: Sei $\ell = \mathrm{ord(x)} \in \mathbb{N}_{>0}$. Dann gilt $x^\ell = e_G$ in G. Da f ein GH ist gilt nach Anwenden von f:

$$f(x)^\ell = f(x^\ell) = f(e_G) = e_H.$$

Hieraus folgt, dass $\mathrm{ord(f(x))} = \mathrm{inf\{m \in \mathbb{N}_{>0} \mid f(x)^m = e_H\}}$ in $\mathbb{N}_{>0}$ liegt. Nach dem Hinweis gilt zudem $\mathrm{ord(f(x))}$ teilt $\ell = \mathrm{ord(x)}$. $\square$