

## GRUPPEN UND SYMMETRIEN TRAININGSZETTEL III

JULIA SAUTER

Nebenklassen und symmetrische Gruppe.

### Aufgaben zu Nebenklassen und dem Satz von Lagrange:

Es sei  $G = (\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^\times$ . Berechnen Sie den Index der Untergruppe  $U = \langle \bar{2} \rangle$  und finden Sie alle Linksnebenklassen von  $U$  (d.h. insbesondere: welche gleich sind und welche verschieden).

### Aufgaben zur symmetrischen Gruppe:

(1) Gegeben sind die folgenden Permutationen in  $S_7$

$$\sigma_1 = (2, 1) \circ (2, 3) \circ (6, 5) \circ (6, 4)$$

$$\sigma_2 = (1, 2) \circ (2, 7) \circ (3, 4) \circ (2, 3) \circ (1, 2) \circ (1, 5) \circ (1, 2) \circ (2, 3) \circ (3, 4) \circ (6, 3)$$

$$\sigma_3: \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, \quad \bar{x} \mapsto \overline{4x + 1}$$

$$\sigma_4: \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, \quad \bar{x} \mapsto \overline{2x + 2}$$

- (a) Berechnen Sie die Ordnung und das Vorzeichen dieser Permutationen.
  - (b) Finden Sie alle Paare konjugierter Elemente in diesen Permutationen.
  - (c) Für jedes Paar konjugierter Permutationen finden Sie ein  $g \in S_9$ , so dass die Konjugation mit  $g$  das andere Element gibt.
- (2) (a) Finden Sie alle Konjugationsklassen in  $S_4$  und beschreiben Sie, wie viele Elemente diese haben.
- (b) Beschreiben Sie alle möglichen Zykeltypen in  $S_7$  und berechnen Sie die maximale Ordnung eines Elementes in  $S_7$ .
- (3) Sei  $D_6$  die Diedergruppe erzeugt von einer Drehung  $r$  der Ordnung 6 und einer Spiegelung  $s$ . Wir fixieren die folgende Nummerierung der Elemente in  $D_6$ :

$$g_1 = 1, g_2 = r, g_3 = r^2, \dots, g_6 = r^5, g_7 = s, g_8 = sr, g_9 = sr^2, \dots, g_{12} = sr^5$$

Mit dieser Nummerierung, erhalten wir einen injektiven Gruppenhomomorphismus  $f: D_6 \rightarrow S_{12}$  gegeben durch die Abbildung, die  $g_i$  auf die Linksmultiplikation mit  $g_i$  abbildet und  $j$  mit  $g_j$  identifiziert.

- (a) Schreiben Sie das  $f(s)$ ,  $f(r)$  und  $f(r^3)$  in  $S_{12}$  als Produkt disjunkter Zykeln. Welche dieser drei Elemente sind konjugiert zueinander?
- (b) Zeigen Sie, dass  $s$  und  $r^3$  nicht konjugiert in  $D_6$  sind.