

GRUPPEN UND SYMMETRIEN 10. ÜBUNGSBLATT

JULIA SAUTER

Abgabe bis Do, 19.12.19, 12:00h in den Postfächern Ihrer Tutoren im Kopierraum.

Aufgabe 10.1 (Hier: Ein Graph hat höchstens eine Kante zwischen je zwei Ecken und keine Schleifen)

- (a) In der Vorlesung wird gezeigt, dass es bis auf Permutation der Ecken gerade 11 Graphen mit 4 Ecken gibt. Zeichnen Sie alle 11.
- (b) Schreiben Sie nun alle Graphen mit 3 Ecken bis auf Permutation der Ecken auf. Verifizieren Sie diese Anzahl, indem Sie es mit dem Lemma von Burnside nachrechnen.

Aufgabe 10.2 Gegeben ist eine Perlenkette mit drei Perlen. Sie färben jede Perle in einer von drei Farben. Auf wieviele Arten können Sie die Kette einfärben, wenn sie zwei Färbungen, die durch eine Drehung der Kette ineinander übergehen miteinander identifizieren? Beantworten Sie diese Frage zweimal:

- (a) Indem Sie alle Möglichkeiten auflisten.
- (b) Indem Sie mit dem Lemma von Burnside die Anzahl Bahnen der $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ -Operation auf den 27 Färbungen ausrechnen.

Aufgabe 10.3 Sie haben einen Weihnachtsstern, der in ein regelmäßiges 5-Eck eingeschrieben ist. Dies induziert eine Fünftelung in gleich große Teile von der Mitte zu den Zacken des Sterns. Nun färben Sie jedes Fünftel auf der Vorder- und gleichzeitig auf der Rückseite in einer von zwei Farben.

Wie viele Färbungen finden Sie, wenn Sie die Rotationen um Vielfache von $\frac{360}{5} = 72$ Grad erlauben und das Umdrehen des Sternes an einer Symmetrieachse? Beantworten Sie diese Frage zweimal:

- (a) Indem Sie alle Möglichkeiten aufschreiben.
- (b) Indem Sie die Anzahl Bahnen unter der D_5 -Operation auf allen 32 Färbungen mit Hilfe von Burnside's Lemma ausrechnen.

Aufgabe 10.4 Wir betrachten die Untergruppe $U = \langle \sigma \rangle$, die von $\sigma = (1, 2, 3) \circ (4, 5) \in S_5$ zyklisch erzeugt wird. Die Gruppe S_5 operiert diagonal auf der Menge $\{1, 2, 3, 4, 5\} \times \{1, 2, 3, 4, 5\}$ durch $g * (i, j) := (g(i), g(j))$ und wir betrachten nun die Einschränkung auf die Gruppe U .

- (a) Finden Sie alle Bahnen und Stabilisatoren.
- (b) Berechnen Sie die Anzahl der Bahnen noch ein zweites Mal mit dem Lemma von Burnside.