

GRUPPEN UND SYMMETRIEN

4. ÜBUNGSBLATT

JULIA SAUTER

Abgabe bis Do, 7.11.19, 12:00h in den Postfächern Ihrer Tutoren im Kopierraum. Sie dürfen einen Taschenrechner für die Übungsaufgaben benutzen.

Aufgabe 4.1 (Textaufgabe zum Teilen mit Rest) Am Mittwoch um 12:00h erhält Lena eine Nachricht, dass ihr Paket in 18400 Minuten geliefert wird. An welchem Wochentag und um welche Uhrzeit kommt es an?

Aufgabe 4.2 (Quadratische Reste modulo 10)

- (a) Wir betrachten die Menge der Quadratzahlen im Dezimalsystem $\{0, 1, 4, 9, 25, 36, 49, \dots\}$. Für jeden möglichen Rest $r \in \{0, 1, \dots, 9\}$ modulo 10 bestimmen Sie den Rest von r^2 beim Teilen durch 10. Folgern Sie, dass eine Quadratzahl niemals auf 2, 3, 7 oder 8 im Dezimalsystem endet.
- (b) Zeigen Sie mit ähnlicher Methode wie in (a), dass jede vierte Potenz einer ganzen Zahl im Dezimalsystem nicht auf 2, 3, 4, 7, 8 oder 9 endet.

Aufgabe 4.3 Kind A und Kind B probieren von 1 bis 91 nummerierte Stühle aus. Kind A startet auf dem dritten Stuhl und geht dann immer um sieben höher. Kind B startet auf dem zweiten und geht dann immer um 13 Stühle weiter.

- (a) Auf welchem Stuhl haben beide Kinder gegessen? Warum gibt es genau einen?
(b) Nach chinesischem Restsatz ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}/91\mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/13\mathbb{Z} \\ k + 91\mathbb{Z} &\mapsto (k + 7\mathbb{Z}, k + 13\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

ein Isomorphismus. Finden Sie das eindeutige Urbild von $(3 + 7\mathbb{Z}, 2 + 13\mathbb{Z})$ in $\mathbb{Z}/91\mathbb{Z}$.

Aufgabe 4.4

- (a) Wenden Sie den erweiterten euklidischen Algorithmus an, um $a, b \in \mathbb{Z}$ zu finden, so dass $100a + 121b = 1$ gilt.
(b) Lösen Sie die folgende simultane Kongruenz, d.h. finde alle $x \in \mathbb{Z}$ mit

$$\begin{aligned} x &\equiv -1 \pmod{100} \\ x &\equiv 2 \pmod{121} \end{aligned}$$