GEOMETRIE
1. ÜBUNGSBLATT

WILLIAM CRAWLEY-BOEVEY, JULIA SAUTER

Abgabe: Bis zum Montag, den 11.4. um 10h im Lernraum ihres Tutoriums. Jede Aufgabe zählt 4 Punkte. Zusatzaufgaben geben zusätzlich eine angegebene Punktzahl.

Es sei $\mathbb{F}_q$ im Folgenden immer ein Körper mit q Elementen.

Aufgabe 1.1 (Die unendlich ferne Gerade). Sei K ein Körper. Erinnern Sie sich, dass $\mathbb{A}^2(K) = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in K\}$ und $\mathbb{P}^2(K) = \{[u_0 : u_1 : u_2] \mid u_0, u_1, u_2 \in K$, nicht alle gleich Null$\}$, mit der Eigenschaft, dass $[u_0 : u_1 : u_2] = [u_0'\colon u_1'\colon u_2']$ genau dann, wenn es ein $0 \neq \lambda \in K$ gibt, so dass $u_0' = \lambda u_0$, $u_1' = \lambda u_1$, und $u_2' = \lambda u_2$. Zeigen Sie Folgendes.

(a) Die Abbildung $\mathbb{A}^2(K) \to \mathbb{P}^2(K)$, $(x_1, x_2) \mapsto [1 : x_1 : x_2]$ ist injektiv. Wir verwenden dies, um $\mathbb{A}^2(K)$ mit einer Teilmenge von $\mathbb{P}^2(K)$ zu identifizieren.
(b) Das Komplement von $\mathbb{A}^2(K)$ in $\mathbb{P}^2(K)$ is eine Gerade in $\mathbb{P}^2(K)$. Wir nennen sie die unendlich ferne Gerade.
(c) Wenn L eine beliebige Gerade in $\mathbb{P}^2(K)$ außer der unendlich fernen Geraden ist, dann ist $L \cap \mathbb{A}^2(K)$ eine Gerade in $\mathbb{A}^2(K)$.
(d) Wenn L' eine beliebige Gerade in $\mathbb{A}^2(K)$ ist, dann gibt es einen Punkt P auf der unendlich fernen Geraden, so dass $L' \cup \{P\}$ eine Gerade in $\mathbb{P}^2(K)$ ist.

Aufgabe 1.2 (Endliche affine Ebene). Zeigen Sie für $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_q)$ gilt:

(a) Jede Gerade hat q Punkte.
(b) Jeder Punkt liegt auf $q + 1$ Geraden.
Hinweis: Zeigen Sie dafür zuerst: $(1, 0)$ liegt auf $q + 1$ Geraden und benutzen Sie dann die $\mathrm{Gl}_2(\mathbb{F}_\mathrm{q})$-Operation.
(c) Es gibt q^2 Punkte.
(d) Es gibt $q^2 + q$ Geraden.

Aufgabe 1.3 (Endliche projektive Ebene). Zeigen Sie für $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q)$ gilt:

(a) Jede Gerade hat $q + 1$ Punkte.
(b) Jeder Punkt liegt auf $q + 1$ Geraden.
(c) Es gibt $q^2 + q + 1$ Punkte.
(d) Es gibt $q^2 + q + 1$ Geraden.

...Mehr

Quelle: dobblegame.com

Aufgabe 1.4 Im Spiel Dobble gibt es 57 verschiedene Symbole, 55 Karten und jede Karte enthält 8 verschiedene Symbole. Je zwei Karten enthalten immer genau ein gemeinsames Symbol. Beim Aufdecken von zwei Karten geht es darum dies besonders schnell zu finden.

In Aufgabenteil (a) und (b) geht es um eine Version des Spieles mit weniger Symbolen und weniger Karten. In (d) geht es um ein geändertes Spielkonzept.

(a) Indem Sie die Mengen L_a^+ mit $0 \neq a \in \mathbb{F}_2^3$ betrachten, schreiben Sie die Geraden in $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$ explizit als Teilmengen von $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$ aus.
(b) Beschriften Sie die Elemente von $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$ mit den Ziffern $1, 2, \ldots, 7$. Verwenden Sie die Geraden in $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$, um 7 Karten zu erstellen, die jeweils 3 der Ziffern $1, 2, \ldots, 7$ enthalten, sodass zwei beliebige Karten genau eine Ziffer gemeinsam haben.
(c) Welche projektive Ebene $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q)$ ergibt die Karten für Dobble?
(d) Verwenden Sie die Komplemente der Geraden in $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$, um 7 Karten zu erstellen, die jeweils 4 der Ziffern $1, 2, \ldots, 7$ enthalten. Welche Eigenschaft haben diese Karten?

Aufgabe 1.5 (Zusatzaufgabe: +2P)

(a) Zeichnen Sie $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_3)$ als farbigen Graphen mit Ecken gegeben durch die Punkte. Zeichnen Sie die Gerade als einen Weg durch die Ecken bzw. Punkte, die diese enthält. Verwenden Sie für verschiedene Geraden verschiedene Farben, so dass man erkennen kann, durch welche Punkte diese verlaufen.
(b) Zeichen Sie den $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ als Graphen. Verwenden Sie wieder verschiedene Farben für verschiedene Geraden. Als Hilfestellung sind dies hier die Menge der Ecken:

012		010		001	
	100	111	122		
	110	121	102		011
	120	101	112		