LINEARE ALGEBRA 1
1. ÜBUNGSBLATT

WILLIAM CRAWLEY-BOEVEY, JULIA SAUTER

Abgabe: Bis zum 21.10.22 um 10:00h im Postfach Ihres Tutors[1].

Aufgabe 1.1

(PÜ) Wir betrachten die folgenden Teilmengen von $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$:

$$X_1 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y = 3x^2, x^2 + y \leq 16\}$$
$$X_2 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \ x \cdot y \text{ gerade}\}$$
$$X_3 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid |x| \leq 3, y = 4x\}$$

Beschreiben Sie die folgenden Mengen explizit $X_1, X_3, X_1 \cap X_3, X_1 \cap X_2, X_1 \cup X_2$

(Tut) Wir betrachten die folgenden Teilmengen von $\mathbb{Z}$:

$$X_1 = \{-12, -6, 0, 2, 3, 7, 12, 13, 27\}$$
$$X_2 = \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists w \in \mathbb{Z} \colon 3x = w^2\}$$
$$X_3 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \leq 3\}$$

Beschreiben Sie die folgenden Mengen explizit $X_1 \cap X_2, X_3, X_1 \cup X_3, X_2 \cap X_3$.

Aufgabe 1.2 Es sei X eine Menge. Falls X endlich ist, bezeichnen wir mit $|X| \in \mathbb{N}_0$ die Kardinalität von X.

(PÜ) Die Potenzmenge ist die Menge $\mathcal{P}(X) = \{X' \mid X' \subseteq X\}$. Beschreiben Sie die folgenden Potenzmengen $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1, 3\})), \mathcal{P}(\{1, 3\} \times \{1, 2\}), \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$.
Beweisen Sie mit vollständiger Induktion: Falls $|X| = n$, so gilt $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$.

(Tut) (2P+2P) Es sei X eine Menge mit n Elementen und Y eine Menge mit m Elementen. Es sei $\mathrm{Abb(X, Y)}$ die Menge aller Abbildungen von X nach Y. Was ist die Kardinalität von $\mathrm{Abb(X, Y)}$? Finden Sie eine bijektive Abbildung $\mathrm{Abb(X, \{0, 1\})} \to \mathcal{P}(\mathrm{X})$.

Aufgabe 1.3 Sei X eine Menge und A, B, C seien drei Teilmengen von X

(PÜ) Zeigen Sie:
- (a) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ und $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C)$
- (b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  Bemerkung: In der Vorlesung wurde gezeigt $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(Tut) Zeigen Sie:
- (a) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$,
- (b) $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$

[1](PÜ)-Aufgaben werden in den Präsenzübungen besprochen. (Tut)-Aufgaben werden wöchentlich abgegeben und korrigiert, jede (Tut)-Aufgabe zählt 4 Punkte.

Aufgabe 1.4

(PÜ) (a) Wir studieren das Beispiel $X = \mathbb{N}_{>0}$, $f\colon X \to X, f(n) = n^2 + 1$, $X_1 = \{2n \mid n \in X\}, X_2 = \{2n+1 \mid n \in X\}, X_3 = \{n \in X \mid 10 \leq n < 50\}$. Beschreiben Sie die folgende Teilmenge $f(f^{-1}(f(X_1) \cap X_3) \cap f^{-1}(X_2))$

(b) Es sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung zwischen zwei Mengen X und Y. Gegeben zwei Teilmengen X_1, X_2 von X. Gelten die Gleichheiten $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$ und $f(X_1 \cap X_2) = f(X_1) \cap f(X_2)$?

(Tut) (a) (2P) Wir betrachten das Beispiel der Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x| - 5$. Berechnen Sie die folgende Teilmenge $f(f^{-1}(f^{-1}([0,1]) \cap \mathbb{Z}) \cap f^{-1}(\mathbb{R}_{>0}))$

(b) (2P) Es sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung zwischen zwei Mengen X und Y. Beweisen Sie, dass für je zwei Teilmengen Y_1, Y_2 von Y gilt $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$ und $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$.

Notation: $\mathbb{N}_{>0} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.