LINEARE ALGEBRA 1
10. ÜBUNGSBLATT

WILLIAM CRAWLEY-BOEVEY, JULIA SAUTER

Abgabe: Bis zum 23.12.22 um 12:00h im Postfach Ihres Tutors.

Aufgabe 10.1

(PÜ) Gegeben zwei Vektorräume V und W und sei $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V. Erklären Sie, dass sich jede Abbildung $\{v_1, \dots, v_n\} \to W$ eindeutig zu einer linearen Abbildung $V \to W$ fortsetzen läßt und jede lineare Abbildung $V \to W$ kann auf diese Art erhalten werden.
Sei nun $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ eine lineare Abbildung, die $f((1,2)^T) = (3,1,4,1)^T$ und $f((2,1)^T) = (3,-1,2,2)^T$ abbildet. Berechnen Sie $f(e_1)$ und $f(e_2)$ und finden Sie $A \in M_{4\times 2}(\mathbb{R})$ mit $f = L_A$.

(Tut) (a) Welche der folgenden Abbildungen sind linear? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel als Antwort.
(i) $f\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^4$, $f(z,w) = (0, iz, iw, z+w)$
(ii) $f\colon \mathbb{Z}_2^3 \to \mathbb{Z}_2^3$, $f(x,y,z) = (x^2, (x+y)^2, z^2)$
(b) Sei nun $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei K-Vektorräumen. Sei $U \subseteq W$ ein Unterraum von W. Beweisen Sie die folgende Behauptung (aus der Vorlesung): $f^{-1}(U)$ ist ein Unterraum von V.

Aufgabe 10.2 Es sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ gegeben durch

$$f(x,y,z) = (x+2y+3z, x+2y+3z, x+3z, 2x+6z)$$

(PÜ) (a) Finden Sie die darstellende Matrix von f bezgl. der Standardbasen vom $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^4$.
(b) Finden Sie eine Basis von $\mathrm{Ker(f)}$.

(Tut) (a) Finden Sie eine Basis von $\mathrm{Bild(f)}$.
(b) Wir betrachten die Basis $B = (v_1 = (1,1,1), v_2 = (1,1,0), v_3 = (1,0,0))$ von $\mathbb{R}^3$ und $C = (w_1 = (1,0,0,0), w_2 = (1,1,0,0), w_3 = (0,0,1,0), w_4 = (0,0,1,1))$ vom $\mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie die darstellende Matrix von f bezüglich dieser beiden Basen.

Aufgabe 10.3 Es sei K ein Körper mit $\mathrm{char(K)} \neq 2$. Wir betrachten die Abbildung

$$f\colon M_2(K) \to M_2(K), \quad f(A) = \frac{1}{2}(A + A^T)$$

(PÜ) (a) Zeigen Sie, dass f linear ist. Bestimmen Sie die darstellende Matrix bezüglich der Basis $B = (v_1 = E_{11}, v_2 = E_{12}, v_3 = E_{21}, v_4 = E_{22})$ von $M_2(K)$. Berechnen Sie eine Basis von $\mathrm{Ker(f)}$ und eine Basis von $\mathrm{Bild(f)}$.

(Tut) Sei K ein Körper und $P_3 = \{p(X) \in K[X] \mid \mathrm{Grad\ p(X)} \leq 3\}$. Wir betrachten die Abbildung

$$f\colon P_3 \to P_3, \quad p(X) \mapsto 2p(X+1).$$

(a) Zeigen Sie, dass f eine lineare Abbildung ist und berechnen Sie die darstellende Matrix in der Basis $(1, X, X^2, X^3)$.

(b) Falls $\mathrm{char}(\mathrm{K}) \neq 2$, zeigen Sie, dass f ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 10.4 Es sei $f\colon V \to V$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie:

(PÜ) Es gilt $f \circ f = 0$ genau dann, wenn $\mathrm{Bild(f)} \subseteq \mathrm{Ker(f)}$ gilt.
(Tut) Falls $f \circ f = f$ gilt, so gilt $V = \mathrm{Ker(f)} \oplus \mathrm{Bild(f)}$.