LINEARE ALGEBRA 1
11. ÜBUNGSBLATT

WILLIAM CRAWLEY-BOEVEY, JULIA SAUTER

Abgabe: Bis zum 13.1.23 um 12:00h im Postfach Ihres Tutors.

Aufgabe 11.1

(a) Sei V ein Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Unterraum. Seien $v, v' \in V$. Wir definieren $v \sim v'$ durch $v - v' \in U$. Zeigen Sie: Dies definiert eine Äquivalenzrelation auf V und die Äquivalenzklasse von $v \in V$ ist $U + v = \{u + v \mid u \in U\}$.

(b) Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Es sei $U = \{A \in M_n(K) \mid \mathrm{Spur(A)} = 0\}$. Zeigen Sie: U ist ein Unterraum von $M_n(K)$ und
$$M_n(K)/U \cong K$$
Hinweis: Homomorphiesatz (s. Vorlesung)

Aufgabe 11.2 Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und U, W zwei Unterräume von V. Wir betrachten die lineare Abbildung $f\colon W \to V/U, f(w) = U + w$. Beweisen Sie:

(a) Die Abbildung f ist genau dann injektiv, wenn $U \cap W = \{0\}$ gilt.

(b) Die Abbildung f ist genau dann surjektiv, wenn $U + W = V$ gilt.

Bemerkung: Insbesondere können Sie daraus direkt ein Lemma aus der Vorlesung folgern: f ist genau dann bijektiv ist, wenn $U \oplus W = V$ gilt.

Aufgabe 11.3 Seien $n, m \in \mathbb{N}_{>0}$, K ein Körper und $A \in M_{m\times n}(K), b \in K^m$. Es sei $\mathrm{Lös}(A, b) = \{x \in K^n \mid Ax = b\}$ der Lösungsraum des lineares Gleichungssystems und $(A|b) \in M_{m\times(n+1)}(K)$ die um b erweiterte Matrix.
Beweisen Sie: $\mathrm{Lös}(A, b) \neq \emptyset$ gilt genau dann, wenn $\mathrm{Rang}((A|b)) = \mathrm{Rang}(A)$.
In diesem Fall ist $\mathrm{Lös}(A, b) = \mathrm{Ker}(L_A) + x_0$ für ein beliebiges $x_0 \in \mathrm{Lös}(A, b)$.

Aufgabe 11.4 Es sei $A \in M_{m\times n}(K)$ eine Matrix in reduzierter Treppenform, insbesondere gibt es Spalten $j_1 < \cdots < j_r$, in denen die Pivots sind. Sei $(e_1, \ldots, e_n)$ die kanonische Basis von K^n und zur Unterscheidung $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$ die kanonische Basis von K^m. Erklären Sie zuerst[1]:
$$Ae_{j_i} = \varepsilon_i, \quad 1 \leq i \leq r.$$

(a) Zeigen Sie: $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r)$ ist eine Basis von $\mathrm{Bild}(L_A)$

(b) Zeigen Sie: $(\mathrm{Ker}(L_A) + e_{j_1}, \ldots \mathrm{Ker}(L_A) + e_{j_r})$ ist eine Basis von $K^n/\,\mathrm{Ker}(L_A)$.

Alternative: Wenn Sie $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ annehmen und damit die Aufgabe lösen, können Sie damit 3 Punkte von 4 Punkten erreichen.

[1] diese Vorarbeit gibt keine Punkte, ist aber hilfreich für die Aufgabe.