LINEARE ALGEBRA 1
12. ÜBUNGSBLATT

WILLIAM CRAWLEY-BOEVEY, JULIA SAUTER

Abgabe: Bis zum 20.1.23 um 12:00h im Postfach Ihres Tutors[1].

Aufgabe 12.1 Es sei K ein Körper und $f = L_A\colon K^4 \to K^7$ eine injektive lineare und $g = L_B\colon K^7 \to K^5$ eine surjektive lineare Abbildung.
Welche Werte kann $\mathrm{Rang(g \circ f) =: t}$ annehmen?
Wir fixieren nun $A := (e_1, e_2, e_3, e_4),\ e_i \in K^7$, insbesondere ist $BA = (Be_1, Be_2, Be_3, Be_4)$ die Matrix, die man durch die ersten 4-Spalten von B erhält. Für jeden möglichen Wert von t finden Sie ein $B_t \in M_{5\times 7}(K)$, so dass $\mathrm{Rang(L_{B_t} \circ L_A) = t}$.

Aufgabe 12.2 Wir betrachten zwei lineare Abbildungen $f\colon U \to V$ und $g\colon V \to W$ zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen. Zeigen Sie, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind

(1) $\mathrm{Ker(g) = Bild(f)}$
(2) $g \circ f = 0$ und $\mathrm{Rang(f) + Rang(g) = \dim V}$

Aufgabe 12.3 Es sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K. Für einen Unterraum $U \subseteq V$ ist $U^0 = \{h \in V^* \mid h(u) = 0\ \forall u \in U\}$ ein Unterraum von V^*. Die Abbildung $U \mapsto U^0$ ist laut Vorlesung eine Bijektion zwischen t-dimensionalen Unterräumen von V und $(n-t)$-dimensionalen Unterräumen von V^*. Zeigen Sie für Unterräume U, W von V gilt
(a) $U \subseteq W \Leftrightarrow W^0 \subseteq U^0$, (b) $(U+W)^0 = U^0 \cap W^0$, (c)$(U \cap W)^0 = U^0 + W^0$.

Aufgabe 12.4 Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K. Eine Hyperebene ist ein Unterraum der Dimension $\dim V - 1$. Falls $h \in V^*$, $h \neq 0$ so ist $\mathrm{Ker(h) \subseteq V}$ eine Hyperebene (siehe vorige Aufgabe). Zeigen Sie:
Ein Tupel $(h_1, \ldots, h_t)$ in V^* ist genau dann ein Erzeugendensystem, wenn $\bigcap_{i=1}^t \mathrm{Ker(h_i)} = \{0\}$ gilt.
Hinweis zu einem möglichen Beweis: Falls $h \neq 0$ in V^*, so gilt $\mathrm{(Ker(h))^0 = Span(h)}$, warum? Benutzen Sie dann Aufgabe 12.3

[1] In dieser Woche werden die (PÜ)-Aufgaben als Probeklausur - Teil 1 (ca 45 min) gestellt und besprochen