LINEARE ALGEBRA 1

13. ÜBUNGSBLATT

WILLIAM CRAWLEY-BOEVEY, JULIA SAUTER

Abgabe: Bis zum 27.1.23 um 12:00h im Postfach Ihres Tutors¹.

Aufgabe 13.1 Wir betrachten $\sigma, \tau \in S_6$ definiert durch

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 6 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Schreiben Sie σ und τ als Produkt disjunkter Zyklen. Berechnen Sie $\sigma\tau, \tau\sigma, \sigma^{-1}, \tau^{-1}$ und σ^n für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

Aufgabe 13.2 Berechnen Sie die Determinante der Matrix mit ganzzahligen Koeffizienten

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -5 \\ -2 & 4 & 8 & -10 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 13.3 (a) Es seien $a_0, \dots, a_{n-1} \in K, \lambda \in K$. Zeigen Sie

$$\det \begin{pmatrix} \lambda & & & a_0 \\ -1 & \lambda & & a_1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \lambda & a_{n-2} \\ & & & -1 & \lambda + a_{n-1} \end{pmatrix} = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

alle nicht spezifizierten Einträge seien Null.

Hinweis: Laplace Entwicklung nach der ersten Zeile und Induktion nach n

(b) Es seien $x_1, x_2, x_3, x_4 \in K$. Berechnen Sie

$$\det \begin{pmatrix} 1+x_1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x_2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x_3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x_4 \end{pmatrix}$$

¹In dieser Woche werden die (PÜ)-Aufgaben als Probeklausur - Teil 2 (ca 45 min) gestellt und besprochen

Aufgabe 13.4 Es sei K ein Körper und n, m in $\mathbb{N}_{>0}$. Es sei $A \in M_n(K), B \in M_m(K), C \in M_{n \times m}(K)$. Zeigen Sie:

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A)\det(B)$$

Sie dürfen dabei Folgendes² benutzen

- (1) den Determinantenproduktsatz (d.h. es gilt $\det(A_1 A_2) = \det(A_1)\det(A_2)$ für alle Matrizen $A_1, A_2 \in M_{n+m}(K)$) und
- (2) für quadratische Matrizen M gilt $\det(M) \neq 0$ genau dann, wenn M invertierbar ist.

Hinweis: Falls B invertierbar ist, so gilt $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & CB^{-1} \\ 0 & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$

²wird in der kommenden Woche in der Vorlesung bewiesen