LINEARE ALGEBRA 1
2. ÜBUNGSBLATT

WILLIAM CRAWLEY-BOEVEY, JULIA SAUTER

Abgabe: Bis zum 28.10.22 um 10:00h im Postfach Ihres Tutors in V3-128 [1].

Aufgabe 2.1 Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität, Bijektivität. Falls die Abbildung bijektiv ist, finden Sie die inverse Abbildung.

(PÜ) (a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = x + y$
(b) $f\colon \{1, 2, 3\} \to \{1, 4\}, f(1) = 1 = f(3), f(2) = 4$
(c) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, f(x, y) = (x^2, x - y, y)$
(d) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $f_{a,b}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$. Unterscheiden Sie die beiden Fälle $a \neq 0$ und $a = 0$.

(Tut) (a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$
(b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$
(c) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x + 2y, 2x - y)$
(d) Sei $n \in \mathbb{Z}$ und $f_n\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, f_n(x) = nx$. Unterscheiden Sie die Fälle (i) $n = 0$, (ii) $n \in \{-1, 1\}$ und (iii) $|n| > 1$.
(Sie dürfen die folgende Eigenschaft benutzen: Sind $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $xy = 0$, so gilt $x = 0$ oder $y = 0$.)

Aufgabe 2.2 Es seien $g\colon X \to Y, f\colon Y \to Z$ zwei Abbildungen.

(PÜ) Zeigen oder widerlegen Sie:
$f \circ g$ surjektiv impliziert f surjektiv
$f \circ g$ surjektiv impliziert g surjektiv

(Tut) Zeigen oder widerlegen Sie:
$f \circ g$ injektiv impliziert f injektiv
$f \circ g$ injektiv impliziert g injektiv

[1](PÜ)-Aufgaben werden in den Präsenzübungen besprochen. (Tut)-Aufgaben werden wöchentlich abgegeben und korrigiert, jede (Tut)-Aufgabe zählt 4 Punkte.

Aufgabe 2.3

(PÜ) (a) Wir betrachten die Menge $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ und R eine Relation darauf. Stellen Sie R als eine Tabelle (Matrix) mit Zeilen und Spalten jeweils nummeriert von 1 bis 5 dar. Schreiben Sie ein x in ein Feld (i, j) (i-te Zeile, j-tel Spalte), falls $(i, j) \in R$ und ein 0, falls $(i, j) \notin R$. Beschreiben Sie: Wann ist R symmetrisch, reflexiv, transitiv, antisymmetrisch? Geben Sie Beispiele von Äquivalenzrelationen und Halbordnungen. Erkären Sie an einem Beispiel, wie man aus einer Partition von $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ eine Äquivalenzrelation erhält und vice versa.

(b) Es sei X die Menge aller Menschen, wir betrachten die Relationen R_1, R_2 auf X definiert durch

(i) xR_1y falls $x = y$

(ii) xR_2y falls x kennt y

Untersuchen Sie, ob R_1 bzw. R_2 eine Äquivalenzrelation definiert.

(Tut) (a) (2P) Finden Sie alle Äquivalenzrelationen $\sim$ auf der Menge $\{1, 2, 3, 4\}$, die $1 \sim 2$ erfüllen.

(b) (2P) Es sei $X = \mathbb{Z}^2$, wir betrachten die Relationen R_1, R_2 auf X definiert durch

(i) xR_1y falls $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ mit $x_1 \leq y_2$

(ii) xR_2y falls $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ mit $x_1 + y_2 = y_1 + x_2$.

Untersuchen Sie, ob R_1 bzw. R_2 eine Äquivalenzrelation definiert.

Aufgabe 2.4

(PÜ) Es sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Wir definieren $x \sim x'$ falls $f(x) = f(x')$ gilt. Zeigen Sie, dass dies eine Äquivalenzrelation definiert. Zeigen Sie, dass die Äquivalenzklasse von $x \in X$ gerade das Urbild vom Bild von x ist, also $f^{-1}(\{f(x)\})$.

(Tut) Sei $n \in \mathbb{Z}$. Wir betrachten die folgende Relation auf $\mathbb{Z}$: $z \equiv_n z'$ falls es ein $c \in \mathbb{Z}$ gibt mit $z - z' = cn$. Zeigen Sie, dass dies eine Äquivalenzrelation definiert.