LINEARE ALGEBRA 1
3. ÜBUNGSBLATT

WILLIAM CRAWLEY-BOEVEY, JULIA SAUTER

Abgabe: Bis zum 4.11.22 um 12:00h im Postfach Ihres Tutors[1].

Aufgabe 3.1 Es sei $G = (G, *)$ eine Gruppe mit neutralem Element e.

(PÜ) Zeigen Sie: Falls $g * g = e$ für alle $g \in G$ gilt, so ist G abelsch.
(Tut) Zeigen Sie: Falls $a * a = a$ gilt, so folgt $a = e$.

Aufgabe 3.2 Welche der folgenden Mengen bildet zusammen mit der angegebenen Verknüpfung eine Gruppe?

(PÜ) (a) Wir betrachten eine drei-elementige Menge $\{e, a, b\}$ und die folgenden unvollständigen Verknüpfungen:

$*$	e	a	b
e	e		
a		e	
b			e

$\circ$	e	a	b
e	e		
a		a	
b			b

$\times$	e	a	b
e	e		
a		b	
b			a

Welche der Verknüpfungen lassen sich zu einer Gruppe vervollständigen und welche nicht?

(b) Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ zusammen mit der Mittelwertbildung $x \bullet y = \frac{x+y}{2}$.
(c) Die Menge $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ mit der Verknüpfung $a \diamond b = ab + a + b$
(d) Die Menge $\mathbb{R}$ mit der Verknüpfung $x \cdot y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$

(Tut) (a) Die Menge $\mathbb{R}$ mit der Verknüpfung $a \diamond b = ab + a + b$
(b) Die Menge $\mathbb{R}$ mit der Verknüpfung $x \otimes y = 3x + 4y$
(c) Die Menge $\mathbb{R}$ mit der Verknüpfung $x \circ y = x + y - 1$.
(d) Die Menge $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$ mit der Verknüpfung $(t, a) * (s, b) = (t + as, ab)$.

Aufgabe 3.3

(PÜ) Sein nun die Menge $G = \{A, B, C, D, E\}$ zusammen mit Verknüpfung $*$ eine Gruppe. Die folgende Tabelle ist ein Teil der Verknüpfungstabelle. Fülle die fehlenden Felder aus (mit kurzen Begründungen).

$*$	A	B	C	D	E
A	A				
B		E	D	A	
C					
D				C	
E		C			

[1](PÜ)-Aufgaben werden in den Präsenzübungen besprochen. (Tut)-Aufgaben werden wöchentlich abgegeben und korrigiert, jede (Tut)-Aufgabe zählt 4 Punkte.

(Tut) Sei S_3 die symmetrische Gruppe auf drei Elementen, d.h. die Menge der bijektiven Abbildungen $f\colon \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$ zusammen mit der Verknüpfung $\circ$. Nach Vorlesung ist bekannt, dass S_3 sechs Elemente hat.

(a) Schreibe die sechs Elemente $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$ vin S_3 explizit auf.

(b) Stelle die Verknüpfungstabelle der Gruppe S_3 auf.

Aufgabe 3.4 Es seien $G = (G, *)$ und $H = (H, \circ)$ zwei Gruppen mit neutralen Elementen e_G, e_H respektive. Sei $f\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus.

(PÜ) (a) Sei U eine Untergruppe von H. Zeigen Sie, dass das Urbild $f^{-1}(U)$ eine Untergruppe von G ist. Insbesondere ist $f^{-1}(\{e_H\})$ eine Untergruppe von G. (Sie wird Kern von f genannt und mit $\mathrm{Ker(f)}$ bezeichnet.)

(b) Zeigen Sie: f ist genau dann injektiv, wenn $\mathrm{Ker(f)} = \{\mathrm{e_G}\}$ gilt.

(Tut) (a) Sei U eine Untergruppe von G. Zeigen Sie, dass das Bild $f(U)$ eine Untergruppe von H ist.

(b) Wir betrachten $G \times H$ mit der Verknüpfung

$$(g, h) \cdot (g', h') = (g * g', h \circ h')$$

Zeigen Sie, dass $(G \times H, \cdot)$ eine Gruppe ist. Falls G und H abelsch ist, so auch $G \times H$. Folgern Sie, dass $\mathbb{R}^n$ mit punktweiser Addition eine abelsche Gruppe ist für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$.