LINEARE ALGEBRA 1
4. ÜBUNGSBLATT

WILLIAM CRAWLEY-BOEVEY, JULIA SAUTER

Abgabe: Bis zum 11.11.22 um 12:00h im Postfach Ihres Tutors in V3-128

Für $z = a + ib \in \mathbb{C}$ definieren wir $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.
Sei $t \in \mathbb{R}$, wir definieren die komplexe Zahl

$$e^{it} := \cos(t) + i\sin(t)$$

Sie dürfen die folgenden Eigenschaften annehmen, die direkt aus den Eigenschaften von Kosinus und Sinus folgen:

(i) $e^{it} = e^{is}$ genau dann, wenn $t = s + 2\pi k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$
(ii) Aus den Additionstheoremen für Sinus und Kosinus folgt: $e^{it}e^{is} = e^{i(s+t)}$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$
(iii) Nach Definition von Sinus und Kosinus ist jedes $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| = 1$ von der Form e^{it} für ein $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4.1

(PÜ) (1) Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$

$$i^{-1}, \quad \frac{1}{1+i}, \quad \frac{(1+2i)(1-i)}{(1+i)^2}$$

(2) Definieren wir $e^z = e^a e^{ib}$ für $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, so definiert dies einen Gruppenhomomorphismus $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$.

(Tut) (2P+2P) (1) Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a+ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$

$$\frac{2i}{1+5i}, \quad \frac{|2+i|(1-2i)}{(1+i)(3+i)}$$

(2) Zeigen Sie: $\mathbb{C}^\times \to \mathbb{R}_{>0}$, $z \mapsto |z|$ ist ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus.

Aufgabe 4.2

(PÜ) Zeigen Sie : (1) Die Teilmenge $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ ist eine Untergruppe von $\mathbb{C}^\times$.
(2) Beschreiben Sie den Kern[1] des Gruppenhomomorphismus $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$, $z \mapsto e^z$.

(Tut) (1) Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Zeigen Sie die Gleichheit: $\{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\} = \{e^{2\pi i \frac{k}{n}} \mid 0 \leq k \leq n-1\}$
(Hinweis: Für " $\subseteq$ " zeigen Sie zuerst, dass die linke Menge in S^1 enthalten ist und benutzen Sie Vorbemerkung (iii),(i).)
(2) Zeigen Sie, dass diese Menge eine Untergruppe von S^1 ist. Sie wird die Gruppe der *n-ten Einheitswurzeln* genannt und mit $\mu_n(\mathbb{C})$ bezeichnet.

[1] *Kern* wird in A 3.4 (PÜ) (a) eingeführt

Es sei $R = (R, +, \cdot)$ ein Ring. Eine Teilmenge $S \subseteq R$ heißt **Unterring** falls S eine Untergruppe in $(R, +)$ ist und für alle $x, y \in S$ gilt $x \cdot y \in S$.
Ein Unterring S in einem Körper R heißt **Unterkörper** falls zusätzlich $1_R \in S$ und für $x \in S, x \neq 0_R$ gilt $x^{-1} \in S$

Aufgabe 4.3

(PÜ) Zeigen Sie:

(1) Zeigen Sie: Ist $S \subset \mathbb{Z}$ ein Unterring, der 1 enthält, so ist $S = \mathbb{Z}$. Ist $K \subset \mathbb{Q}$ ein Unterkörper, so gilt $K = \mathbb{Q}$.
(2) $\mathbb{Q}$ ist ein Unterkörper von $\mathbb{R}$ und dieser ist ein Unterkörper von $\mathbb{C}$.
(3) $\mathbb{Z}[i] = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$ ist ein Unterring von $\mathbb{C}$, der kein Unterkörper ist.

(Tut) (2P+2P)

(1) Zeigen Sie, dass $R = \{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b$ ungerade $\}$ ein Unterring von $\mathbb{Q}$ ist.
(2) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{x + \sqrt{2}y \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ ein Unterkörper von $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 4.4

(PÜ) Zeigen Sie, dass $S = \{[0], [2], [4], [6], [8]\}$ ein Unterring von $\mathbb{Z}_{10}$ ist.
Zeigen Sie, dass S ein Ring mit Eins (gegeben durch $[6]$) ist.

(Tut) Sei $R = (R, +, \cdot)$ ein Ring. Wir betrachten die abelsche Gruppe $T = (R, +) \times (\mathbb{Z}, +)$, die durch komponentenweise Addition gegeben ist (vergleichen Sie A 3.4 (Tut)). Wir definieren eine weitere Verknüpfung $*\colon T \times T \to T$ durch

$$(r_1, z_1) * (r_2, z_2) = (r_1 r_2 + z_1 r_2 + z_2 r_1, z_1 z_2)$$

Zeigen Sie, dass $(T, +, *)$ ein Ring mit Eins gegeben durch $(0_R, 1)$ ist.