LINEARE ALGEBRA 1
5. ÜBUNGSBLATT

WILLIAM CRAWLEY-BOEVEY, JULIA SAUTER

Abgabe: Bis zum 18.11.22 um 12:00h im Postfach Ihres Tutors in V3-128

Aufgabe 5.1

(PÜ) Erklären Sie das Teilen mit Rest in $\mathbb{Q}[X]$ anhand von explizit gewählten Polynomen $f(X)$ und $g(X) \neq 0$ aus $\mathbb{Q}[X]$ (das heißt: Wie findet man $q(X), r(X) \in \mathbb{Q}[X]$ so dass $f(X) = q(X)g(X) + r(X)$ mit $\mathrm{Grad(r(X))} < \mathrm{Grad(g(X))}$?)

(Tut) Seien $f(X) = (4i)X^5 + X^3 - 1$ und $g(X) = X^2 - i$ in $\mathbb{C}[X]$. Finden Sie $q(X), r(X) \in \mathbb{C}[X]$, so dass $f(X) = q(X)g(X) + r(X)$ mit $\mathrm{Grad(r(X))} < \mathrm{Grad(g(X))}$.

Aufgabe 5.2 Sei α ein Symbol. Wir betrachten die Menge

$$\mathbb{F}_4 = \{a + b\alpha \mid a, b \in \mathbb{Z}_2\}$$

und definieren zwei Verknüpfungen auf ihr durch

$$(a + b\alpha) + (c + d\alpha) := (a + c) + (b + d)\alpha$$
$$(a + b\alpha) \cdot (c + d\alpha) := (ac + bd) + (bd + ad + bc)\alpha$$

für alle $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_2$.

(PÜ) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{F}_4, +)$ eine abelsche Gruppe mit neutralem Element $0_{\mathbb{F}_4} := [0] + [0]\alpha$ ist. Stellen Sie die Verknüpfungstabelle für $\cdot$ auf und folgern Sie: Sind $x, y \in \mathbb{F}_4$ mit $x \cdot y = 0_{\mathbb{F}_4}$ so gilt $x = 0_{\mathbb{F}_4}$ oder $y = 0_{\mathbb{F}_4}$.
Folgern Sie durch einen Vergleich der Verknüpfungstabelle mit der von $\mathbb{Z}_3$, dass $\mathbb{F}_4 \setminus \{0_{\mathbb{F}_4}\}$ eine abelsche Gruppe ist.

(Tut) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{F}_4, +, \cdot)$ ein Körper ist.
Hinweis: Aufgrund des PÜ-Teils muss hier nur die (einseitige) Distributivität gezeigt werden.

Aufgabe 5.3

(PÜ) (a) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass $q_\lambda(X) = (X - \lambda)(X - \overline{\lambda})$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten ist.
(b) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ Nullstelle eines Polynoms $f(X) \in \mathbb{R}[X]$. Zeigen Sie, dass $\overline{\lambda}$ ebenfalls eine Nullstelle von $f(X)$ ist. Folgern Sie: Falls λ nicht reell ist, so gibt es ein $g(X) \in \mathbb{R}[X]$ mit $f(X) = (X - \lambda)(X - \overline{\lambda})g(X)$.
Hinweis: Für $p(X) = \sum_{i+0}^n a_i X^i \in \mathbb{C}[X]$ definiere $\overline{p}(X) = \sum_{i=0}^n \overline{a_i} X^i$ und zeige $\overline{p}(X)\overline{q}(X) = \overline{p(X)q(X)}$ für alle $p(X), q(X) \in \mathbb{C}[X]$. Zeigen Sie dann $g(X) = \overline{g}(X)$, um zu sehen, dass $g(X) \in \mathbb{R}[X]$ gilt.

(Tut) (a) Benutzen Sie die Formel für Nullstellen eines quadratischen Polynoms um das Polynom $X^2 + X + 1 \in \mathbb{C}[X]$ als Produkt von Linearfaktoren zu schreiben.

(b) Folgern Sie aus dem Hauptsatz der Algebra, dass jedes Polynom $0 \neq f(X) \in \mathbb{R}[X]$ sich als Produkt

$$f(X) = c \cdot q_1(X) \cdots q_s(X)(X - t_1) \cdots (X - t_r)$$

mit $q_i \in \mathbb{R}[X]$ ohne reelle Nullstelle vom Grad 2, $t_j \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}^\times, s, r \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ schreiben läßt.[1]

Aufgabe 5.4

(PÜ) Wir betrachten $\mathbb{R}$ mit der abelschen Gruppenstruktur aus A 3.2 (PÜ) (d), die wir hier mit $x \oplus y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ für $x, y \in \mathbb{R}$ bezeichnen.
Wir definieren eine neue Verknüpfung $*$ auf $\mathbb{R}$ durch entweder
(a) $x * y = xy$ (übliche Multiplikation in $\mathbb{R}$) oder
(b) $x * y = \sqrt[3]{xy}$
In welchem Fall definiert $*$ eine Skalarmultiplikation auf der abelschen Gruppe $(\mathbb{R}, \oplus)$, d.h. wann definiert dies einen reellen Vektorraum?

(Tut) Es sei $(G, +)$ eine abelsche Gruppe. Zeigen Sie, dass G genau dann ein $\mathbb{Z}_2$-Vektorraum ist, wenn $v + v = 0$ für alle $v \in G$ gilt.

[1] Konvention: Das Produkt über die leere Indexmenge ist 1.