LINEARE ALGEBRA 1
6. ÜBUNGSBLATT

WILLIAM CRAWLEY-BOEVEY, JULIA SAUTER

Abgabe: Bis zum 25.11.22 um 12:00h im Postfach Ihres Tutors in V3-128.

Aufgabe 6.1 Multiplizieren Sie Matrizen A, B mit reellen Koeffizienten wenn möglich für A, B aus den folgenden Mengen ($A = B$ ist auch erlaubt):

(PÜ) $\{2, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}$

(Tut) $\{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\}$

Aufgabe 6.2 Sei K ein Körper, $n, m \in \mathbb{N}_{>0}$

(PÜ) Seien $A = (a_{ij}) \in M_{n\times m}(K)$. Wir bezeichnen mit $e_i \in K^n$ den Spaltenvektor mit i-tem Eintrag 1 und 0 sonst, $1 \le i \le n$. [1]
Zeigen Sie für alle $i \in \{1, \ldots, n\}, j \in \{1, \ldots, m\}$:

$$Ae_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}, \quad e_i^T A = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{im} \end{pmatrix}, \quad e_i^T A e_j = a_{ij}$$

(Tut) Eine Matrix $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ heißt **obere Dreiecksmatrix**, wenn $a_{ij} = 0$ für alle $i > j$ gilt. Zeigen Sie: Sind $A, B \in M_n(K)$ obere Dreiecksmatrizen, so auch AB.[2]

Aufgabe 6.3 Sei K ein Körper. Seien $A \in M_{n\times m}(K), B \in M_{m\times \ell}(K)$.

(PÜ) Zeigen Sie:
$$(AB)^T = B^T A^T$$
Folgern Sie: Für $A \in \mathrm{Gl_n(K)}$ gilt $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

(Tut) Sei nun $\ell = n$, so gilt:
$$\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)$$
Sei nun $E_{ij} = e_i e_j^T \in M_n(K)$ die Matrix mit 1 an Eintrag (i, j) und 0 sonst. Zeigen Sie $E_{ij}E_{k\ell} = \delta_{jk}E_{i\ell}$ für alle $i, j, k, \ell \in \{1, \ldots, n\}$. Berechnen Sie $\mathrm{Spur}(ABC)$ und $\mathrm{Spur}(ACB)$ für die folgenden Matrizen $A = E_{12},\ B = E_{22},\ C = E_{21}$ aus $M_2(K)$.

[1]Analog für jedes andere n , beachte: Die Notation e_i läßt offen, wie lang der Spaltenvektor ist. Bei Matrizenprodukten wird immer die Länge angenommen, so dass das Produkt definiert ist.

[2]Um den Namen zu verstehen: Zum Beispiel, für $n = 3$ hat eine obere Dreiecksmatrix die Form $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix}$ mit $a, b, c, d, e, f, g \in K$.

Aufgabe 6.4 (Alternative Beschreibung der komplexen Zahlen) Wir betrachten die Menge

$$\mathcal{C} = \{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\} \quad \subseteq M_2(\mathbb{R})$$

und die Abbildung $f\colon \mathbb{C} \to \mathcal{C}$ mit $f(a+bi) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

(PÜ) Zeigen Sie: f ist bijektiv, $f(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad f(xy) = f(x)f(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{C}$.

(Tut) Zeigen Sie: $\mathcal{C}$ ist ein kommutativer Unterring von $M_2(\mathbb{R})$. Falls $A \in \mathcal{C}$, $A \neq 0$, so gibt es ein Inverses $A^{-1} \in \mathcal{C}$, insbesondere ist $\mathcal{C}$ ein Körper.

Die folgende Aufgabe ist nicht Teil der regulären Übungsaufgaben. Es entsteht Euch kein Nachteil, wenn Ihr sie nicht bearbeitet.

6.5 (Bonusaufgabe (4P)) Es sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

(a) (Division mit Rest) Es sei $z \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass es eindeutig bestimmte $q, r \in \mathbb{Z}$, so dass $z = qn + r$ und $r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ gilt. Man nennt q den *Quotient* und r den *Rest* bei der Division (von z) mit Rest (durch n).
Hinweis: Falls $z > 0$ ist $n\mathbb{Z} \cap \{0, 1, \ldots, z\}$ endlich und besitzt deswegen ein Maximum.

(b) Zeigen Sie: Zwei ganze Zahlen a, b lassen bei der Division durch n mit Rest genau dann den gleichen Rest, wenn $[a] = [b]$ in $\mathbb{Z}_n$ gilt.