LINEARE ALGEBRA 1
7. ÜBUNGSBLATT

WILLIAM CRAWLEY-BOEVEY, JULIA SAUTER

Abgabe: Bis zum 2.12.22 um 12:00h im Postfach Ihres Tutors[1].

Aufgabe 7.1 Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme in den reellen Zahlen durch elementare Zeilenumformungen.

(PÜ)

$$(i)\quad \begin{aligned} 2x+3y+5z &= 1 \\ 2x+4y+4z &= 4 \end{aligned} \qquad (ii)\quad \begin{aligned} 2x+3y+5z &= 1 \\ 2x+4y+4z &= 1 \end{aligned}$$

(Tut)

$$(i)\quad \begin{aligned} x-4y+3z &= 2 \\ 3x-11y+13z &= 3 \\ 2x-9y+2z &= 7 \\ x-2y+11z &= -4 \end{aligned} \qquad (ii)\quad \begin{aligned} x+2y-z &= 2 \\ 2x-5y+z &= 3 \\ x-7z &= 2 \end{aligned}$$

Aufgabe 7.2 Wir betrachten Matrizen mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$.

(PÜ) Wenden Sie elementare Zeilenumformungen an, um die folgenden Matrizen zuerst zu einer Treppenform und danach zu einer reduzierten Treppenform zu bringen.

$$(i)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & -6 \end{pmatrix} \qquad (ii)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(Tut) Benutzen Sie elementare Zeilenumformungen, um zu überprüfen Sie, ob die folgenden Matrizen invertierbar sind. Berechnen Sie die inverse Matrix, falls diese existiert.

$$(i)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad (ii)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.3 Sei K ein Körper $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Wir haben drei Typen von Elementarmatrizen
1. $E_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$,
2. $P_{ij} = I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$
3. $D_i(\mu) = I_n + (\mu - 1)E_{ii}$

wobei $i \neq j$ aus $\{1, \dots, n\}$, $\lambda, \mu \in K$, $\mu \neq 0$ und $E_{k\ell} = e_k e_\ell^T$ für alle $k, \ell \in \{1, \dots, n\}$.

[1](PÜ)-Aufgaben werden in den Präsenzübungen besprochen. (Tut)-Aufgaben werden wöchentlich abgegeben und korrigiert, jede (Tut)-Aufgabe zählt 4 Punkte.

(PÜ) Testen Sie (an Beispielen oder ganz allgemein), was passiert, wenn Sie die Elementarmatrizen von rechts an Matrizen multiplizieren. Erklären Sie auf diese Art die drei Typen von elementaren Spaltenumformungen.

(Tut) Zeigen Sie: Durch Rechtsmultiplikation mit Elementarmatrizen kann man jede Matrix $T \in M_{n\times m}(K)$ in reduzierter Treppenform als

$$T = \underbrace{\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{n\times m} P$$

mit $P \in \mathrm{Gl_m(K)}$ faktorisieren. Folgern Sie aus dem Gaußalgorithmus, dass es für jede Matrix $A \in M_{n\times m}(K)$ invertierbare Matrizen $Q \in \mathrm{Gl_n(K)}, \mathrm{P} \in \mathrm{Gl_m(K)}$ gibt, so dass

$$A = Q \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P$$

Aufgabe 7.4 Sei K ein Körper.

(PÜ) Gegeben ein inhomogenes Gleichungssystem $Ax = b$ (mit Koeffizienten in K). Angenommen eine Lösung x_0 existiert. Zeigen Sie, dass alle Lösungen von der Form $x_0 + x$ sind mit x eine Lösung des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$.

(Tut) Sei $\lambda \in K$. Finden Sie alle Werte λ für die das folgende Gleichungssystem eine/ keine oder mehrere Lösungen hat.

$$\begin{aligned} x + y + \lambda z &= 1 \\ x + \lambda y + z &= 1 \\ \lambda x + y + z &= 1 \end{aligned}$$