LINEARE ALGEBRA 1
8. ÜBUNGSBLATT

WILLIAM CRAWLEY-BOEVEY, JULIA SAUTER

Abgabe: Bis zum 9.12.22 um 12:00h im Postfach Ihres Tutors[1].

Aufgabe 8.1 Welche der gegebenen Teilmengen U im einem gegebenen Vektorraum V sind Untervektorräume? Falls es sich um einen Untervektorraum handelt, beweisen Sie Ihre Aussage.

(PÜ) Sei $V = \mathbb{R}^3$.

(i) $U = \{(a, 2b, ab) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, (ii) $U = \{(a, b, c) \mid a + b + c = 0$ oder $b + 2c = 0\}$

Fangfrage: Ist $\mathbb{Q}^3$ ein Untervektorraum von V?

(Tut) (i) Sei K ein Körper, $V = K^3$, $U = \{(a, b, c) \mid a + b + c = 2\}$.
Unterscheiden Sie: $\mathrm{char(K)} = 2$ und $\mathrm{char(K)} \neq 2$.

(ii) Sei $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und es sei $U = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = f(x + 2\pi) \mid \forall x \in \mathbb{R}\}$

Aufgabe 8.2

(PÜ) Geben Sie ein Beispiel zweier Untervektorräume U_1, U_2 in einem Vektorraum, so dass $U_1 \cup U_2$ kein Untervektorraum ist.

(Tut) Seien U_1, U_2 zwei Untervektorräume in einem Vektorraum V. Zeigen Sie, dass die Vereinigung $U_1 \cup U_2$ genau dann wieder ein Untervektorraum ist, wenn $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$ gilt.

Aufgabe 8.3 Sei K ein Körper. Gegeben ist eine Menge von Vektoren im K^n. Testen Sie, ob die Vektoren ein Erzeugendensystem oder linear unabhängig sind.

(PÜ)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{im} \quad \mathbb{R}^4$$

(Tut)

$$(i) \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3-i \\ 1+2i \end{pmatrix} \quad \text{im} \quad \mathbb{C}^3, \qquad (ii) \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{im} \quad \mathbb{Z}_2^4$$

[1](PÜ)-Aufgaben werden in den Präsenzübungen besprochen. (Tut)-Aufgaben werden wöchentlich abgegeben und korrigiert, jede (Tut)-Aufgabe zählt 4 Punkte.

Aufgabe 8.4 Berechnen Sie für die folgenden Vektorräume V_i jeweils eine Basis.

(PÜ)

$$(i)\;\; V_1 = \{ \begin{pmatrix} a \\ 2b \\ a+3b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \}, \quad (ii)\;\; V_2 = \{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid a + b - c + d = 0 \}$$

(Tut) (i) $V_1 = \{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4 \mid x + y + z = 0$ und $y - iz + w = 0 \}$

(ii) $V_2 = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) \subseteq \mathbb{Z}_2^5$