LINEARE ALGEBRA 1

9. ÜBUNGSBLATT

WILLIAM CRAWLEY-BOEVEY, JULIA SAUTER

Abgabe: Bis zum 16.12.22 um 12:00h im Postfach Ihres Tutors

Aufgabe 9.1 Gegeben sind die drei folgenden Untervektorräume im $\mathbb{R}^3$

$$U_1 := \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$$

$$U_2 := \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2\}$$

$$U_3 := \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0 = x_2\}$$

(PÜ) Finden Sie eine Basis für $U_1 \cap U_2$ und eine Basis für $U_1 + U_2$.

(Tut) Finden Sie jeweils Basen für die vier Untervektorräume $U_1 \cap U_3$, $U_1 + U_3$, $U_2 \cap U_3$, $U_2 + U_3$. Welche der Summen $U_i + U_j$ mit $i < j$ ist eine direkte Summe?

Aufgabe 9.2

(PÜ) Zeigen Sie, dass die Vektoren $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (1, 1, 2)$, $v_3 = (1, 1, 3)$, $v_4 = (1, 2, 3)$ ein Erzeugendensystem vom $\mathbb{R}^3$ bilden. Zeigen Sie, dass (v_1, v_2, v_3, v_4) nicht linear unabhängig sind. Finden Sie eine Basis vom $\mathbb{R}^3$ durch das Streichen einiger Vektoren des Erzeugendensystems.

(Tut) Zeigen Sie, dass $v_1 = (1, -i, 1)$, $v_2 = (1, -1, i)$ linear unabhängig im $\mathbb{C}^3$ sind. Ergänzen Sie diese linear unabhängigen Vektoren zu einer Basis des $\mathbb{C}^3$.

Für Matrizen $A = (a_{ij})_{ij} \in M_n(\mathbb{C})$ definieren wir $\bar{A} := (\bar{a}_{ij})_{ij} \in M_n(\mathbb{C})$.

Aufgabe 9.3 Wir betrachten die vier Matrizen in $M_2(\mathbb{C})$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(PÜ) Zeigen Sie, dass $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$ eine Basis des folgenden reellen Vektorraums ist

$$U := \{A = (a_{ij})_{ij} \in M_2(\mathbb{C}) \mid \bar{A} = A^T\}$$

(Tut) Zeigen Sie, dass $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$ eine Basis des komplexen Vektorraums $M_2(\mathbb{C})$ ist.

Aufgabe 9.4

(PÜ) Es sei $U = \text{Span}(e_1) \subseteq \mathbb{Z}_3^2$. Finden Sie alle möglichen Komplemente von U (das heißt, gesucht sind alle Untervektorräume W , so dass $U \oplus W = \mathbb{Z}_3^2$).

(Tut) (a) Zeigen Sie, dass $M_n(\mathbb{C})$ als reeller Vektorraum eine direkte Summenzerlegung als

$$U \oplus W \text{ mit } U = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A = \bar{A}^T\} \text{ und } W = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A = -\bar{A}^T\} \text{ hat.}$$

(b) Finden Sie ein Komplement für den Untervektorraum $L = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + w = 0, y - 3w = 0\}$ im $\mathbb{R}^4$.