Julia Sauter
William Crawley-Boevey

Lineare Algebra 1

WS 22/23

Probeklausur - am ??.01.2023

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

1	2	3	4	5	6	$\sum$	Gesamt	Note

Zugelassene Hilfsmittel: Ein beidseitig handbeschriebenes DIN-A4-Blatt, ein nicht programmierbarer Taschenrechner sowie Schreibutensilien.
Veröffentlichung des Klausurergebnisses: Im Lernraum der Vorlesung sobald die Korrektur abgeschlossen ist.

Falls Sie nicht im WS 22/23 den Übungsnachweis zur Vorlesung Lineare Algebra erbracht haben, wird ihre Klausur nicht bewertet.

Name, Vorname:
Matrikelnummer:

Aufgabe 1 (8 Punkte):

Es sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und K ein Körper. Zeigen Sie, dass $U = \{A \in \mathrm{GL_n(K)} \mid \mathrm{AA^T = I}\}$ eine Untergruppe von $\mathrm{GL_n(K)}$ ist.
Aus der Vorlesung wird gebraucht: $(AB)^T = B^T A^T$ *für Matrizen...*

Aufgabe 2 (8 Punkte):

Seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \in M_{1\times 4}(\mathbb{R})$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2\times 4}(\mathbb{R})$.
Finden Sie eine Basis für den Schnitt

$$\{x \in \mathbb{R}^4 \mid Ax = 0\} \cap \{x \in \mathbb{R}^4 \mid Bx = 0\}.$$

Beim Gauss-Algorithmus die el.ZUF hinschreiben

Aufgabe 3 (8 Punkte):

Es sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie: Falls f injektiv ist und $(v_1, \dots, v_t)$ linear unabhängig in V, so sind $(f(v_1), \dots, f(v_t))$ linear unabhängig in W.
Seien Sie bitte genau beim Aufschreiben. Die Definition von linearer Unabhṅgigkeit und Injektivität wird hier indirekt mitabgefragt. Wählen Sie alle Skalare etc...

Aufgabe 4 (3+5 Punkte):

Es sei K ein Körper und für $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei $P_n = \{p(X) \in K[X] \mid \mathrm{Grad(p(X)) \leq n}\}$. Wir betrachten die Abbildung

$$f\colon P_3 \to P_4, \quad p(X) \mapsto Xp(X+1).$$

Beweisen Sie, dass f linear ist und finden Sie die darstellende Matrix von f bezüglich der Basen $(1, X^2, X^3, X)$ von P_3 und $(X^4, X^3, X^2, X, 1)$ von P_4.
Berechnen Sie die Bilder der Basisvektoren und schreiben Sie diese als Linearkombination in der Zielbasis. Beim i-tem Basisvektor lesen wir die i-te Spalte ab...

Aufgabe 5 (8 Punkte):

Sei V ein Vektorraum und $f\colon V \to V$ eine lineare Abbildung, es gelte $f^2 = f$. Beweisen Sie, dass $U = \{v \in V \mid f(v) = v\}$ ein Unterraum von V ist und $V = \mathrm{Ker(f) \oplus U}$ gilt.

Aufgabe 6 (8 Punkte):

Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ und $L_A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, x \mapsto Ax$ die zugehörige lineare Abbildung. Weiterhin sei $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ wobei $v_1 := e_1, v_2 := e_1 + e_2$.

Schreiben Sie die Bilder der dualen Basisvektoren v_1^*, v_2^* unter der dualen Abbildung L_A^* als Linearkombination in der Basis (v_1^*, v_2^*).