LINEARE ALGEBRA 1
WEIHNACHTSBLATT

WILLIAM CRAWLEY-BOEVEY, JULIA SAUTER

Abgabe: Bis zum 6.1.23 um 12:00h via Email an Ihren Tutor.[1]

Das Thema des Weihnachtsblattes sind zwei nützliche Erweiterungen des Gaußalgorithmus.
Sei K ein Körper und $n, m \in \mathbb{N}_{>0}$. Falls $A \in M_{m\times n}(K)$ gegeben ist, so ist $\text{Lös}(A, 0) := \{x \in K^n \mid Ax = 0\}$ der Lösungsraum des homogenen Gleichungssystems. Ist $L_A \colon K^n \to K^m, x \mapsto Ax$, so ist nach Definition $\mathrm{Ker}(L_A) = \text{Lös}(A, 0)$ und $\mathrm{Bild}(L_A) = \mathrm{Span}(Ae_1, \dots, Ae_n)$. Wir brauchen hier den Rangsatz in der Form $\dim \mathrm{Ker}(L_A) + \dim \mathrm{Bild}(L_A) = n$ (dies darf im Folgenden benutzt werden). Nach Vorlesung wissen wir $\text{Lös}(A, 0) = \text{Lös}(A', 0)$ wobei A' eine reduzierte Treppenform von A ist.
Können wir aus A' eine Basis für $\text{Lös}(A, 0)$ konstruieren? (Antwort gibt W1)
Können wir mit A' ebenfalls eine Basis von $\mathrm{Span}(Ae_1, \dots, Ae_n)$ finden? (Antwort gibt W2)
In Aufgabe W3 werden die Algorithmen aus W1 und W2 angewandt.

Aufgabe W1: (4 Punkte) Sei (ohne Einschränkung) $A \in M_{m\times n}(K)$ bereits eine reduzierte Treppenform, seien $j_1 < j_2 < \dots < j_r$ die Pivotspalten in A. Wir tun Folgendes:

(1.) Streiche alle Nullzeilen in A weg und erhalte eine Matrix A_1. Beachte $\text{Lös}(A, 0) = \text{Lös}(A_1, 0)$.
(2.) Für jedes $j \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{j_1, \dots, j_r\}$, füge $-e_j^T$ als j-te Zeile ein bis eine vollständige Treppe aus der Treppe in A_1 ensteht. Sei A_2 diese Matrix.
(3.) Nun nehmen wir nur die Spalten von A_2, die keine Pivotspalten von A sind also

$$(A_2 e_j)_{j\in\{1,2,\dots,n\}\setminus\{j_1,\dots,j_r\}}.$$

Dies gibt eine Basis von $\text{Lös}(A, 0)$.

Beweisen Sie Behauptung in (3.). Zeigen Sie außerdem: $(e_{j_1}, \dots, e_{j_r})$ **ist eine Basis eines Komplements von Lös**$(A, 0)$**.**

Hier ein kleines Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ somit (1.) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \in M_{3\times 5}(\mathbb{R})$

(2.) Einfügen der $-e_j^T$ (j keine Pivotspalte): $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(3.) Dann ist $\left(v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ eine Basis von $\text{Lös}(A, 0)$ und (e_2, e_4) eine Basis eines Komplement davon im $\mathbb{R}^5$.

[1] Alle Aufgaben auf diesem Zettel sind Bonusaufgaben.

Aufgabe W2: (4 Punkte) Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ ein n-Tupel von Vektoren im K^m. Sei $A \in M_{m\times n}(K)$ die Matrix mit $Ae_j = v_j$, $1 \le j \le n$ und es sei A' eine Treppenform von A mit Pivotspalten $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$.
Beweisen Sie: Der Unterraum $\mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_n)$ hat eine Basis $(v_{j_1}, v_{j_2}, \ldots, v_{j_r})$.
Folgern Sie hieraus: Zeilenrang[2] von A = Spaltenrang[3] von A

Aufgabe W3 (2+3+3 Punkte)
Es sei

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4\times 3}(\mathbb{R}).$$

Wir betrachten die lineare Abbildung

$$f\colon M_{3\times 4}(\mathbb{R}) \to M_3(\mathbb{R}), \quad f(X) := X \cdot D$$

Wir wählen Basen $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{14}, E_{21}, E_{22}, \ldots, E_{34})$ von $M_{3\times 4}(\mathbb{R})$ und $\mathcal{C} = (E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{33}, E_{21}, E_{22}, \ldots, E_{33})$ von $M_3(\mathbb{R})$.

(a) **Finden Sie die darstellende Matrix von f bezüglich dieser Basen.**
Hinweis: Rechnen Sie nach, dass dies die Antwort ist

$$\begin{pmatrix} D^T & 0 & 0 \\ 0 & D^T & 0 \\ 0 & 0 & D^T \end{pmatrix} \in M_{9\times 12}(\mathbb{R})$$

(b) **Benutzen Sie Aufgabe W1 und (a) um eine Basis von $\mathrm{Ker}(f)$ zu finden.**
(c) **Benutzen Sie W2 und (a), um eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$ zu finden.**

[2] dies ist $\dim \mathrm{Span}(e_j^T A, 1 \le j \le m)$
[3] dies ist $\dim \mathrm{Span}(Ae_i, 1 \le i \le n)$