Proseminar SoSe 23 - Parkettierungen der Ebene

Organisator: Julia Sauter

Februar 2023

Vortragsliste

Synopsis: Reguläre Parkettierungen (engl. Tesselations or Tilings) der Ebene kommen in der Natur zum Beispiel in Kristallen vor. Um sie zu verstehen, muss man ihre Symmetriegruppen und Fundamentalbereiche verstehen. Natürlich möchte man ein Parkett auch einfärben können - dazu gibt es auch eine mathematische Beschreibung.
Aperiodische Parkettierungen der Ebene kommen in der Natur in sogenannten Quasikristallen vor, sie wurden erst in der zweiten Hälfte des letzten Jahrhunderts endeckt.
Nimmt man zu der Ebene einen Punkt hinzu erhält man die Riemannsche Zahlenkugel, hier werden *Bewegungen* Möbiustransformationen genannt und wie bei der Ebene schränkt man sich auf Untergruppen ein, die eine Parkettierung geben (also einen Fundamentalbereich haben).
Es gibt zahlreiche polulärwissenschaftliche Themen und Spiele, die Anknüpfungspunkte an Parkettierungen der Ebene haben, zum Beispiel die Theorie der Polyominoes, Conway-Coexter Friese.

Reguläre Parkettierungen

Eine Parkettierung heißt *regulär*, wenn ihre Symmetriegruppe transitiv operiert (d.h. jeder *Parkettstein* kann durch eine Symmetrie in jeden anderen überführt werden). Hierzu brauchen wir Gruppenoperationen. Es stellt sich heraus, dass es bis auf Isomorphie 17 mögliche Symmetriegruppen gibt. Die Symmetriegruppe allein gibt aber keine *topologisch* vollständige Invariante. Berücksichtigt man noch sogenannte Lavesnetze in der Parkettierung (und das Zusammenspiel der Netze und Gruppen), so kann man reguläre Parkettierungen mit 93 Typen klassifizieren.
Die Vorträge sind (zumindest teilweise) aufeinander aufbauend. Literatur sind in aufsteigender Komplexität [Beh19], Teil 1., Bigalke-Wippermann [BW94], Kap 5, [GS87], chapter 4 and 6.

(1) **Gruppenoperationen**
Als Einstieg sollen hier auch Gruppenoperationen von Gruppen auf Mengen betrachtet werden. Bahnen (oder Orbiten) und Bahnenraum, Sta-

bilisatoren sollen definiert werden. Es soll die Bahnenformel bewiesen werden. Die folgenden zwei Familien von Gruppen sind für uns besonders relevant: C_n zyklisch mit Ordnung n, D_n Diedergruppe mit $2n$ Elementen. Literatur: Fast jedes Lehrbuch zur Algebra in der Bibliothek, etwa Böhm *Grundlagen der Algebra und Zahlentheorie*, 3.2.2, 3.2.5: Fischer *Lehrbuch der Algebra* 4.1,4.3, Karpfinger,Meyberg *Algebra*, 7.1,7.2 uvm.

(2) **Diskrete ebene Bewegungsgruppen**
Lit: [Beh19] Kap.2 und Abs. 3.1, 3.2. Es wird die Gruppe der Bewegungen der euklidischen Ebene eingeführt und studiert. Der Begriff des Fundamentalbereichs ist zentral, um eine Parkettierung definieren zu können ([Beh19], Abs. 2.4). Der Satz von Leonardo [Beh19], Satz 3.2.3 gibt die Klassifikation der endlichen Bewegungsgruppen (*Rosettengruppen*).

(3) **Die Friesgruppen**
Lit.: [Beh19], 3.3, 3.4
Zuerst soll die Untergruppe der Translationen eingeführt werden ([Beh19], Abs. 3.3). Dann geht es noch nicht um eine Parkettierung, sondern um Friese (Translation in nur eine Richtung und nicht in zwei). Hauptergebnis: Es gibt sieben Symmetriegruppen von Friesen ([Beh19], Satz 3.4.2), die man explizit beschreiben kann.

(4) **Die 17 kristallographischen Gruppen**
Lit.: [Beh19] Abs. 3.5 und [BW94] Abs.5.2 bis einschliesslich Satz 5.2.2 (mit Beweis).
Dies sind die möglichen Symmetriegruppen von Parkettierungen. Ein Hand-out ist für diesen Vortrag eine gute Idee.

(5) **Lavesnetze**
[BW94] Abs. 5.2 ab Definition des Laves-Netzes (hierfür braucht man auch Abs. 5.1) und danach auch [Beh19], Kap 4.
Hintergrundwissen liefert: [GS87], chapter 4 (insbesondere: 4.1.1 liefert, dass das Lavesnetz eine vollständige topologische Invariante ist). Wichtigstes Ergebis Klassifikation ([BW94] Satz 5.2.3). Zudem: Soweit wie möglich von [BW94] Abs. 5.4 (Klassifikation aller Parkettierungen mit gegebenem Lavesnetz),5.5 (Klassifikation der verschiedenen Parkettsteine, die bei jedem Lavesnetz auftreten).

(6) **Klassifikation regulärer Parkettierungen**
[BW94], Abs. 5.3 und [GS87], chapter 6 und chapter 7. bis einschliesslich 7.2
Es kommen 93 Klassen heraus. Hier soll insbesondere geklärt werden, was klassfiziert wird und wie klassifiziert wird (Systematik und Benennung). Zwei Parkettierungen sind in der gleichen Klasse, wenn sie *homeomerisch* sind (vgl. [GS87], 7.1 und 7.2). Eine vollständige Auflistung ist nicht verlangt (kann aber zum Beispiel in einem Slide-Vortrag zum Schluss gezeigt werden oder als Hand-out gegeben werden).

(7) **Linienarrangements**
Optional: Die Konstruktion unendlicher Linienarrangements mit transitiver Symmetrie [GS87], 7.7.
Ansonsten: Endliche Linienarrangements - dafür wird ein neuer Isomorphismusbegriff eingeführt [Gru72], chapter 1 and 2. Hier geht es darum numerische Eigenschaften von Linienarrangements zu verstehen (e.g. Thm 2.4, Thm 2.10, Thm 2.11 etc).

Färbungen geometrischer Objekte

Eine Färbung einer Menge X ist eine Abbildung $X \to \{1, \ldots, k\}$, wobei die Zielmenge als Menge der Farben angesehen wird. Operiert eine Gruppe G von Symmetrien auf X, so ist die Frage, wie man alle Färbungen bis auf Geometrie verstehen (oder für endliche Mengen abzählen) kann. Der berühmte Vier-Farben-Satz (s. Wikipedia) ist hier erst einmal nicht eingeschlossen.

(8) **Polya-Abzählung von Färbungen**
Hier geht es um das Zählen von Färbungen endlicher Mengen bis auf Symmetrie. Beweisen Sie das Lemma von Burnside und leiten Sie den Satz von Polya aus dem Lemma von Burnside her. Die einfachsten Färbungsprobleme sind Perlenketten (mit nur zyklischen Symmetrien). Folgen Sie zum Beispiel [Aig09], Kapitel 4 (online in der Uni bib verfügbar). Falls Sie ambitioniert sind beschäftigen Sie sich mit Symmetriegruppen und Färbungen von platonischen Körpern (Tetraeder, Würfel etc.).

(9) **Färbungen regulärer Parkettierungen**
Lit. [BW94], Kap. 6 und [GS87], chapter 8
In [GS87].p.445 sehen sie einen Überblick über die acht betrachteten Klassifikationsproblemen. Hier ist es sinnvoll sich auf spezielle Färbungen einzuschränken (e.g. [GS87], 8.7)

Aperiodische Parkettierungen

(10) **Penrose Parkettierung**
Lit [Beh19], Kap. 7. Dies ist die bekannteste aperiodische Parkettierung. Insbesondere der Begriff Indexfolge muss hier erklärt werden. Ansonsten liegt es am Geschmack des Vortragenden, welche Sätze er in Detail erklärt.

Möbiustransformationen

Diese Funktionen sind Teil der komplexen Analysis.

(11) **Möbiustransformationen - Einführung**
Dies sind die *Bewegungen* von $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. [Beh19], Kapitel 5

(12) **Diskrete Untergruppen von Möbiustransformationen**
[Beh19], Kapitel 6. Dies sind Gruppen, von denen man Parkettierungen von $\widehat{\mathbb{C}}$ konstruiert.

References

[Aig09] Martin Aigner, *Diskrete Mathematik*, sixth ed., Vieweg Studium: Aufbaukurs Mathematik. [Vieweg Studies: Mathematics Course], Friedr. Vieweg & Sohn, Wiesbaden, 2009. MR 2061138

[Beh19] Ehrhard Behrends, *Parkettierungen der Ebene—von Escher über Möbius zu Penrose*, Springer Spektrum, Wiesbaden, [2019] ©2019. MR 4501861

[BW94] Hans-Günther Bigalke and Heinrich Wippermann, *Reguläre Parkettierungen*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1994, Mit Anwendungen in Kristallographie, Industrie, Baugewerbe, Design und Kunst. [With applications in crystallography, industry, construction, design and art]. MR 1291196

[Gru72] Branko Gruenbaum, *Arrangements and spreads*, Conference Board of the Mathematical Sciences Regional Conference Series in Mathematics, No. 10, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1972. MR 0307027

[GS87] Branko Grünbaum and G. C. Shephard, *Tilings and patterns*, W. H. Freeman and Company, New York, 1987. MR 857454

Allgemeine Hinweise zur Vorbereitung

Dies sind meine persönlichen Erfahrungswerte. Unterschätzen Sie nicht den Arbeitsaufwand, der in der Vortragsvorbereitung steckt. Ein Vortrag ist eine sehr individuelle Eigenleistung, bei der jeder seinen eigenen Stil entwickelt.

(1) Rechtzeitig das Material erst einmal sichten (rechtzeitig hängt von ihrem Arbeitstempo ab. Ca. 4 Wochen vorher, sollte aber reichen). Übungsaufgaben können manchmal schöne Beispiele für einen Vortrag liefern. Zusätzliche Google-Ergebnisse anschauen (zum Beispiel Wikipedia Seite).

(2) Was ist das Hauptergebnis? Oder: Was ist das Thema des Vortrags?

(3) Verschiedene Quellen sichten und jeweils die einfachste wählen. Weniger ist mehr (bei einem Vortrag), nicht alles Material muss in den Vortrag solange das Hauptergebnis/ Hauptproblem gut verständlich behandelt wird (siehe auch (5)).

(4) Den Vortrag *komponieren*: Machen Sie eine Vortragsskizze (vielleicht einen drei (bis fünf)-Punkte Plan für den Anfang des Vortrags). Strukturieren Sie den Vortrag durch, achten Sie darauf, dass die Einzelteile *kompatibel* sind, falls sie verschiedene Quellen benutzen.
Falls Sie einen Slidevortrag (mit Latex) planen, fangen Sie jetzt schon an, eine Draftversion zu schreiben, weil es viel länger dauert einen getippten Vortrag zu vollenden als einen handgeschriebenen. Zudem müssen Sie mehr in die Breite und weniger in die Tiefe gehen. Also mehr Material behandeln, weil Sie schneller sind als bei einem Tafelvortrag. Aber: Beweise können in einem Slidevortrag nur als einfache Skizzen vorgestellt werden, ansonsten ist der Zuhörer überfordert.

(5) Gehen Sie ins Detail bei den Beweisen und Beispielen, die Sie in den Vortrag mitaufnehmen (wichtig: Nicht alles Material muss in Detail verstanden werden, nur der Teil, der dann im Vortrag benutzt wird). Falls es Probleme gibt, ist dies der Punkt, um sich Hilfe zu holen und Fragen zu stellen (1 Woche vor dem Vortrag !).

(6) Schreiben Sie eine erste Rohversion. Falls Sie Slides planen, wird diese nachher zur Endversion modifiziert.

(7) Proben Sie den Vortrag und schätzen Sie ein, wieviel Zeit sie für die einzelnen Abschnitte brauchen. Notieren Sie am besten am Rand zu welcher Uhrzeit sie an ein paar Stellen sein sollten, um ihr Timing einzuschätzen.

(8) Schreiben Sie die endgültige Version, diese wird dann auch abgegeben und im Lernraum den anderen Teilnehmern (möglichst vor dem Vortrag) zugänglich gemacht.