

Proseminar WS21/22 - Kombinatorik

Organisator: Julia Sauter

June 2021

Vortragsliste

Allgemeine Grundlagen

Diese Vorträge sind einfach zugänglich. Die Literatur dazu sind einführende Kapitel in [Aig09], [BZ14] und [Tar12] (in deutsch) - die Übungsaufgaben eingeschlossen.

(1) **Elementare Zählkoeffizienten**

Zusammenfassung einiger elementaren Regeln auf denen alle Abzählungen beruhen [Aig09], Kapitel 1.1, 1.2, 1.4, siehe auch [BZ14], Kapitel 4, [Tar12], II.5-II.6 (Anmerkung: [Aig09]. 1.3 wird in Vortrag (4) zur symmetrischen Gruppe behandelt)

(2) **Erzeugenden Funktionen**

Dieser Vortrag benötigt etwas Analysis 1 Vorkenntnisse. Hier soll erklärt werden, wie man rekursive Zählprobleme mit erzeugenden Funktionen lösen kann. [Aig09], Kapitel 3, [Tar12], 2.7

(3) **Die symmetrische Gruppe**

Diese Gruppe ist so fundamental wichtig, dass wir sie in den allgemeinen Grundlagen betrachten. Es werden folgende Definitionen aus der Gruppentheorie benötigt: Gruppe, Untergruppe, Konjugationsklassen.

(*) Zeige: Jede endliche Gruppe mit n Elementen ist eine Untergruppe der S_n (Satz von Cayley), zum Beispiel [MK13], Abschnitt 2.3.3 (oder [Fis08], I.4.2), Anmerkung: Kann man gut mit Verknüpfungstafel erklären.

(*) Zykeldarstellung [Aig09], 1.3. Zeige: Der Zykeltyp bestimmt die Konjugationsklasse eines Elements. Stirlingzahlen erster Art. [MK13], Abschnitt 9.1 (ohne 9.1.2). Zeige, wie man die Produkte, Potenzen, Ordnung und Inverse von Permutationen mit der disjunkten Zykelschreibweise berechnet [Fis08], Kapitel I.4.5.

(*) *Inklusion und Exklusion* angewendet auf Derrangements [Aig09], 2.4, [BZ14] 4.3.4

Ab hier: *Algebraic Combinatorics* von Stanley

ausgenommen sind davon die einführenden Vorträge zu Graphen, partiell geordneten Mengen und Gruppenoperationen, bei denen externe Quellen gebraucht werden.

(4) **Einführung von Graphen**

Dies ist der Einstieg in die Graphentheorie, hier werden etliche Invarianten von Graphen eingeführt: Adjazenzmatrix, Gradliste, Cliquenzahl, Stabilitätszahl, chromatische Zahl, Wege, Kreise, Euler Touren und Hamilton Kreise. Wichtige Beispielklassen sollen vorgestellt werden: Bäume, reguläre Graphen, vollständige, bipartite und planare Graphen. Beweis der Polyederformel für planare Graphen. Die genaue Zusammenstellung liegt bei dem Sprecher. [Tar12], III.9-III.13, siehe auch [BZ14], Kapitel 8

(5) **Wege in Graphen**

Hier wird mit Hilfe der Eigenwerte der Adjazenzmatrix die Anzahl der Wege einer gegebenen Länge ausgerechnet, [Sta18], chapter 1.

(6) **Wege in n-Würfeln**

Definiere den Graphen C_n , der nachher n-Würfel genannt wird. Hier wird die Radontransformation benutzt, um Wege im n-Würfel zu zählen, [Sta18], chapter 2.

(7) **Einführung von Gruppenoperationen**

Wiederholen Sie den Begriff einer Gruppe und geben Sie Beispiele endlicher Gruppen (zyklische, Dieder- und symmetrische Gruppe). Definieren Sie die Operation einer Gruppe auf einer Menge, die Menge der Bahnen und die der Fixpunkte. Beweisen Sie die Bahnenformel und als Korollar den Satz von Lagrange (siehe zum Beispiel [MK13], Kapitel 7.1-7.2). Dann beweisen Sie das Lemma von Burnside. Erläutern Sie Beispiele. [Sta18], chapter 7 bis einschließlich Thm 7.5, siehe auch [Aig09], 4.3

(8) **Polya Theorie**

Erklären Sie Färbungsprobleme. Definieren Sie Zykelzeiger. Beweisen Sie Polya's Satz und wenden Sie ihn auf Färbungsprobleme an, [Sta18], chapter 7 nach Thm 7.5, siehe auch [Aig09], Kapitel 4, wobei 4.3 das Burnside Lemma erklärt.

(9) **Einführung von partiell geordneten Mengen**

Hier werden wieder die Anfänge der Poset-Theorie gelegt: Hassediagramm, Ketten, Antiketten [Tar12], III.14 (ohne Satz von Sperner 14.3). Desweiteren: Rang, Niveaus, rangerzeugende Funktion, Rangsymmetrie und -unimodularität, Konstruktionen $P + P'$, $P \oplus P'$, $P \otimes P'$, Gitter (Lattices) und distributive Gitter, Beispiele \mathbf{n} , B_n , D_n und Π_n . Die Zusammenstellung bleibt dem Sprecher überlassen, [Sta18] Seite 31-33 und [Sta97], 3.1-3.4

- (10) **Satz von Sperner**
 Hier wird eine besonders schöne Eigenschaft von partiell geordneten Mengen eingeführt, die *Sperner* genannt wird. Die Boolesche (Mengen)Algebra B_n ist die Menge aller Teilmengen von $\{1, 2, \dots, n\}$. Der Satz von Sperner besagt, dass B_n Sperner ist. [Sta18], chapter 4
- (11) **Gruppenaktionen auf der Booleschen Algebra**
 Hier wird das Studium von B_n fortgesetzt. Hier wird die Operation von der symmetrischen Gruppe S_n auf B_n studiert. Anwendung ist die Berechnung der Anzahl der nicht-isomorphen einfach-kantigen Graphen mit gegebener Eckenmenge, [Sta18], chap. 5
- (12) **Young Diagramme und q-binomiale Koeffizienten**
 Hier wird die partiell geordnete Menge $L(m, n)$ von gewissen Partitionen studiert. Die Elemente von $L(m, n)$ werden durch Young Diagramme beschrieben, die in ein $m \times n$ -Rechteck passen. [Sta18], chapter 6
- (13) **Der Matrix-Baum Satz**
 Der Matrix-Baum Satz gibt eine Methode die Anzahl der aufspannenden Bäume in einem Graphen (genannt Komplexität) auszurechnen, [Sta18], chapter 9.
- (14) **Gerichtete Euler Graphen**
 Eine Euler Tour auf einem Graphen ist ein Weg, der alle Kanten genau einmal benutzt. Hier geht es um das Zählen von Euler Touren mit ähnlichen Mitteln wie im vorigen Vortrag, [Sta18], chapter 10.

References

- [Aig09] Martin Aigner, *Diskrete Mathematik*, sixth ed., Vieweg Studium: Aufbaukurs Mathematik. [Vieweg Studies: Mathematics Course], Friedr. Vieweg & Sohn, Wiesbaden, 2009. MR 2061138
- [BZ14] Albrecht Beutelspacher and Marc-Alexander Zschiegner, *Diskrete Mathematik für Einsteiger*, fifth ed., Lehrbuch, Springer Spektrum, 2014.
- [Fis08] Gerd Fischer, *Lehrbuch der Algebra*, Vieweg, 2008.
- [MK13] Kurt Meyberg and Christian Karpfinger, *Algebra*, third ed., Springer Spektrum, 2013.
- [Sta97] Richard P. Stanley, *Enumerative combinatorics. Vol. 1*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 49, Cambridge University Press, Cambridge, 1997, With a foreword by Gian-Carlo Rota, Corrected reprint of the 1986 original. MR 1442260

- [Sta18] ———, *Algebraic combinatorics*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, Cham, 2018, Walks, trees, tableaux, and more, Second edition of [MR3097651]. MR 3823204
- [Tar12] Anusch Taraz, *Diskrete Mathematik*, Mathematik Kompakt, Birkhaeuser, 2012.

Allgemeine Hinweise zur Vorbereitung

Dies sind meine persönlichen Erfahrungswerte. Unterschätzen Sie nicht den Arbeitsaufwand, der in der Vortragsvorbereitung steckt. Ein Vortrag ist eine sehr individuelle Eigenleistung, bei der jeder seinen eigenen Stil entwickelt.

- (1) Rechtzeitig das Material erst einmal sichten (rechtzeitig hängt von ihrem Arbeitstempo ab. Ca. 4 Wochen vorher, sollte aber reichen). Übungsaufgaben können manchmal schöne Beispiele für einen Vortrag liefern. Zusätzliche Google-Ergebnisse anschauen (zum Beispiel Wikipedia Seite).
- (2) Was ist das Hauptergebnis? Oder: Was ist das Thema des Vortrags?
- (3) Verschiedene Quellen sichten und jeweils die einfachste wählen. Weniger ist mehr (bei einem Vortrag), nicht alles Material muss in den Vortrag solange das Hauptergebnis/ Hauptproblem gut verständlich behandelt wird (siehe auch (5)).
- (4) Den Vortrag *komponieren*: Machen Sie eine Vortragsskizze (vielleicht einen drei (bis fünf)-Punkte Plan für den Anfang des Vortrags). Strukturieren Sie den Vortrag durch, achten Sie darauf, dass die Einzelteile *kompatibel* sind, falls sie verschiedene Quellen benutzen.
Falls Sie einen Slidevortrag (mit Latex) planen, fangen Sie jetzt schon an, eine Draftversion zu schreiben, weil es viel länger dauert einen getippten Vortrag zu vollenden als einen handgeschriebenen. Zudem müssen Sie mehr in die Breite und weniger in die Tiefe gehen. Also mehr Material behandeln, weil Sie schneller sind als bei einem Tafelvortrag. Aber: Beweise können in einem Slidevortrag nur als einfache Skizzen vorgestellt werden, ansonsten ist der Zuhörer überfordert.
- (5) Gehen Sie ins Detail bei den Beweisen und Beispielen, die Sie in den Vortrag mitaufnehmen (wichtig: Nicht alles Material muss in Detail verstanden werden, nur der Teil, der dann im Vortrag benutzt wird). Falls es Probleme gibt, ist dies der Punkt, um sich Hilfe zu holen und Fragen zu stellen (1 Woche vor dem Vortrag !).
- (6) Schreiben Sie eine erste Rohversion. Falls Sie Slides planen, wird diese nachher zur Endversion modifiziert.
- (7) Proben Sie den Vortrag und schätzen Sie ein, wieviel Zeit sie für die einzelnen Abschnitte brauchen. Notieren Sie am besten am Rand zu welcher Uhrzeit sie an ein paar Stellen sein sollten, um ihr Timing einzuschätzen.
- (8) Schreiben Sie die endgültige Version, diese wird dann auch abgegeben und im Lernraum den anderen Teilnehmern (möglichst vor dem Vortrag) zugänglich gemacht.