

**PROSEMINAR KÖCHERDARSTELLUNGEN**

DR. JULIA SAUTER

Sie haben Spass an linearer Algebra? Dieses Proseminar bietet eine mögliche Fortsetzung dieser Vorlesung an. Wir studieren Darstellungen von Köchern:

*Ein Köcher ist ein endlicher gerichteter Graph. Eine Köcherdarstellung ist eine Kollektion von Vektorräumen und linearen Abbildungen, für jede Ecke des Graphen einen Vektorraum und für jeden Pfeil eine lineare Abbildung.*

Betrachtet man einen Graphen mit zwei Ecken und einem Pfeil dazwischen, so korrespondiert das Studium der Darstellungen gerade dem Studium linearer Abbildungen.

Das Ziel des Proseminars ist das Verständnis der Auslander-Reiten Theorie insbesondere durch Beispiele. Das Besondere an diesem Bereich der reinen Mathematik ist, dass er durch diese beliebig variablen Beispiele die Entwicklung einer Intuition erlaubt, die die abstrakte Theorie mit Leben füllt.

**Literatur.** Wir folgen in etwa dem Buch von [Sch14], weil es direkt mit Köcherdarstellungen anfängt und online durch die Bibliothek verfügbar ist. Ab Kapitel II kommt in [Sch14] die Theorie der Darstellungen von endlich dimensional Algebren.

Als Alternative gibt es das Buch [ASS06] (genauer: Kapitel I,II,III, IV und VII). Hier ist der Vorteil, dass es viele Beispiele schon enthält. Aber auch ältere Bücher zu dem Thema sind empfehlenswert, etwa [ARS97], [Rin84]. Zudem gibt es eine Reihe von Vorlesungsskripten, in die es sich lohnt, reinzuschauen [Bri], [CBa], [CBb], [AH], [Kra], [Kus]. Als Hintergrundwissen zu Kategorien sind die (englischen) Wikipedia-Einträge für unsere Zwecke ausreichend, diese Begriffe werden in [Sch14] nur kurz gestreift.

**Hier ist die Planung, falls es genau 5 Teilnehmer gibt:**

**Vortrag 1 Köcherdarstellungen.** [Sch14, Abs. 1.1, 1.2] - Köcherdarstellungen, direkte Summen, unzerlegbare Darstellungen und der Satz von Krull-Remak-Schmidt ohne Beweis, siehe Anmerkung.

Zusätzliche Quellen: [ASS06, Anfang von III.1], [Bri, Abs 1.1], [Kus, 7.2], etwas fortgeschrittener ist [Rin84, Abs. 2.1].

(Anmerkung: Für den Satz von Krull-Remak-Schmidt gibt es (nur?) modul-theoretische Beweise, z.B.: Krull-Remak-Schmidt [ASS06, Thm 4.10], siehe auch [Bri, Lem 1.3.3, Thm 1.3.4], [Kra, Abs. 4], [Kus, 1.9,1.10, Kapitel 4])

**Vortrag 2 Die exakte Struktur.** [Sch14, Abs. 1.3-1.4] - Kerne, Kokerne und exakte Folgen, Hom-Funktoren

Zusätzliche Quellen:[Kus, 7.2]

**Vortrag 3 Erste Beispiele von AR Köchern.** [Sch14, Abs. 1.5]

Zusätzliche Quellen: [ASS06, IV.4], [CBb, Abs 1], [AH, 3.3]

**Vortrag 4 Projektive und Injektive.** [Sch14, Abs. 2.1, 2.2]

Zusätzliche Quellen: [Kus, 7.2], [ASS06, III.2], die projektive Standardauflösung [Bri, Abschnitt 1.4 ausser 1.4.6],[CBa, S.7-8]

**Vortrag 5 Die AR-Verschiebung und Ext.** [Sch14, Abs. 2.3, 2.4]

Zusätzliche Quellen: [ASS06, III.2, insbes. Prop. 2.10] für den Nakayama Funktor, (andere Einführung von Ext, siehe [AH, Abs. 1.7] oder Appendix [ASS06, A.4, A.5], für die Gruppenstruktur auf Ext, siehe [BH]), Extgruppen für einfache Moduln [ASS06, III, Lem. 2.12], AR-Verschiebung [AH, 2.1,2.2,3.4], auch empfehlenswert: [CBb]

Bei 5 Teilnehmern gibt es einen Zusatzvortrag (gegebenenfalls vom Organisator)

**Vortrag 6 AR-Köcher vom Dynkin Typ.** [Sch14, Abs. 3.1, 3.3], es geht darum die besonders einfache der Auslander-Reiten Köcher von Dynkin Köcher durch den Translationsköcher zu verstehen, siehe zum Beispiel [Gab80, Abschnitt 6.4, 6.5] und [GR97, S.102, 10.2], [AH, 3.5]

**Falls es mehr Teilnehmer gibt sind folgende Extrathemen geplant (je nach Interesse der Studierenden). Es ist auch möglich Vortrag 4 und 5 auf drei Vorträge aufzuteilen.**

**Vortrag \* Algebren und Moduln.** [Sch14, Kap. 4]

Alternative/zusätzliche Quellen: [Kus], [ASS06, Abs. I.1-I.4] insbesondere noch einmal (vgl. Vortrag 1): der Satz von Krull-Remak-Schmidt [ASS06, Thm 4.10], siehe auch [Bri, Lem 1.3.3, Thm 1.3.4], [Kra, Abs. 4], [Kus, 1.9,1.10, Kapitel 4]

**Vortrag \*+1 Die Wegealgebra eines Köchers.** [Sch14, Kap. 5]

Alternative/Zusätzliche Quellen: [CBa, S.3-5], [ASS06, Kapitel II.1,II.2, III.1]

**Vortrag \* Die Eulerform und Wurzeln.** [Sch14, Abs. 8.2,8.3]

[ASS06, III.3] Teil 1: Dimensionsvektor einer Darstellung, die Grothendieckgruppe, Euler Form. Teil 2: Dynkin Diagramme und euklidische Diagramme [CBa, Abs. 4], siehe auch [Rin84, Abs 1.1, 1.2].

**Vortrag \* +1 Der Satz von Gabriel.** [Sch14, Abs. 3.2, 8.4]

Satz von Gabriel (= die ist die Charakterisierung des endlichen Darstellungstyps von Köcherdarstellungen) [Bri, 2.4], [CBa, Abs. 5]

**Vortrag x Weitere Beispiele von AR-Köchern.** Der Auslander-Reiten Köcher des Kronecker Köchers [Rin84, 3.2], [AH, 5.3]. Weitere Beispiele können gewählt werden aus: [CBb], [Rin84], [ASS06] etc.

REFERENCES

- [AH] ANGELERI-HGEL, L.: *An Introduction to Auslander-Reiten Theory*. – Vorlesungsskript auf Homepage <https://webusers.imj-prg.fr/~bernhard.keller/ictp2006/lecturenotes/angeleri.pdf>
- [ARS97] AUSLANDER, M. ; REITEN, I. ; SMALØ, S. O.: *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Bd. 36: *Representation theory of Artin algebras*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997. – xiv+425 S. – Corrected reprint of the 1995 original
- [ASS06] ASSEM, I. ; SIMSON, D. ; SKOWROŃSKI, A.: *London Mathematical Society Student Texts*. Bd. 65: *Elements of the representation theory of associative algebras. Vol. 1*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006. – x+458 S. – Techniques of representation theory
- [BH] BARTSCH, A. ; HOFFMAN, B.: *Seminarvortrag ueber Ext*. – Vortragsausarbeitung auf Homepage [https://www.math.uni-bielefeld.de/~sek/la3/seminar/sem\\_hla\\_ext.pdf](https://www.math.uni-bielefeld.de/~sek/la3/seminar/sem_hla_ext.pdf)
- [Bri] BRION, M.: *Representations of quivers*. – Vorlesungsskript auf Homepage [https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~mbrion/notes\\_quivers\\_rev.pdf](https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~mbrion/notes_quivers_rev.pdf)
- [CBa] CRAWLEY-BOEVEY, W.: *Lectures on representations of quivers*. – Vorlesungsskript auf Homepage <http://www1.maths.leeds.ac.uk/~pmtwc/quivlecs.pdf>

- [CBb] CRAWLEY-BOEVEY, W.: *More lectures on representations of quivers*. – Vorlesungsskript auf Homepage <http://www1.maths.leeds.ac.uk/~pmtwc/morequivlecs.pdf>
- [Gab80] GABRIEL, Peter: Auslander-Reiten sequences and representation-finite algebras. In: *Representation theory, I (Proc. Workshop, Carleton Univ., Ottawa, Ont., 1979)* Bd. 831. Springer, Berlin, 1980, S. 1–71
- [GR97] GABRIEL, P. ; ROITER, A. V.: *Representations of finite-dimensional algebras*. Springer-Verlag, Berlin, 1997. – iv+177 S. – Translated from the Russian, With a chapter by B. Keller, Reprint of the 1992 English translation
- [Kra] KRAUSE, H.: *KRULL-SCHMIDT CATEGORIES AND PROJECTIVE COVERS*. – Vorlesungsskript auf Homepage <https://www.math.uni-bielefeld.de/~hkrause/krs.pdf>
- [Kus] KUSSIN, D.: *Vorlesung Endlichdimensionale Algebren*. – Vorlesungsskript auf Homepage [http://www3.math.uni-paderborn.de/~dirk/Vorlesungen/EDA/skript\\_ed\\_2.pdf](http://www3.math.uni-paderborn.de/~dirk/Vorlesungen/EDA/skript_ed_2.pdf)
- [Rin84] RINGEL, C. M.: *Lecture Notes in Mathematics*. Bd. 1099: *Tame algebras and integral quadratic forms*. Springer-Verlag, Berlin, 1984. – xiii+376 S.
- [Sch14] SCHIFFLER, R.: *Quiver representations*. Springer, Cham, 2014 (CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC). – xii+230 S.