LISTE EINIGER ZYKELNZEIGER

JULIA SAUTER

Sei $\sigma \in S_n$, dann definieren wir

$$j_k(\sigma) = \text{ Anzahl der } k\text{-Zykel in der Faktorisierung von } \sigma \text{ als disjunkte Zykel}$$

Beispiel: Ist $\sigma = (1,2,3)(4,5)(6,7,9) \in S_9$, also Zykeltyp von σ ist $[3,3,2,1]$, so ist $j_1(\sigma) = 1, j_2(\sigma) = 1, j_3(\sigma) = 2$. Allgemeiner, ist der Zykeltyp (d.h. die Folge der Längen der Zykel in der Faktorisierung in disjunkte Zykel) von σ gegeben durch eine Folge $[a_1, a_2, \ldots, a_t]$ mit $a_1 \geq a_2 \geq \cdots a_t \geq 1$ und $\sum_i a_i = n$, so ist $j_k(\sigma)$ die Anzahl mit der k unter den a_i's auftaucht.

Bemerkung: Die Anzahl aller Elemente in S_n vom Zykeltyp $\underline{a} = [a_1, \ldots, a_t]$ ist

$$h(\underline{a}) := |C([a_1, \ldots, a_t])| = \frac{n!}{\prod_k k^{j_k} \cdot (j_k!)} = \frac{n!}{j_1! \cdot 2^{j_2} \cdot j_2! \cdot 3^{j_3} \cdot j_3! \cdots n^{j_n} \cdot j_n!}$$

wobei $j_k = j_k(\underline{a})$ die Vielfachheit von k in der Folge $a_1, \ldots, a_t$ ist.

Definition: Sei A eine Teilmenge von S_n und seien $s_1, \ldots, s_n$ im Folgenden n Unbekannte. Der **Zykelzeiger** von A ist der folgende polynomielle Ausdruck in den Unbekannten $s_1, \ldots, s_n$

$$Z_A(\underline{s}) := Z_A(s_1, s_2, \ldots, s_n) := \frac{1}{|A|} \sum_{\sigma \in A} s_1^{j_1(\sigma)} s_2^{j_2(\sigma)} \cdots s_n^{j_n(\sigma)}$$

Beispiel: $A = S_3$.id $= (1)(2)(3)$ gibt einen Summanden s_1^3, die drei 2-Zykel geben einen Summanden $3s_1s_2^2$, die zwei 3-Zykel geben einen Summanden $2s_3$
$Z_{S_3}(\underline{s}) = \frac{1}{6}(s_1^3 + 3s_1s_2 + 2s_3)$

Zykelzeiger bekannter Untergruppen von S_n

(1) $\boxed{A = S_n}$
Alle Elemente vom selben Zykeltyp $\underline{a}$ addieren das gleiche Monom $s_1^{j_1} s_2^{j_2} \cdots s_n^{j_n}$ auf, das heißt die Vielfachheit dieses Monoms ist $h(\underline{a})$ falls $j_k = j_k(\underline{a})$ für alle k gilt (s.o.).
$Z_{S_3}(\underline{s}) = \frac{1}{6}(s_1^3 + 3s_1s_2 + 2s_3)$, $\quad Z_{S_4}(\underline{s}) = \frac{1}{24}(s_1^4 + 6s_1^2s_2 + 3s_2^2 + 8s_1s_3 + 6s_4)$
$Z_{S_5}(\underline{s}) = \frac{1}{120}(s_1^5 + 10s_1^3s_2 + 15s_1s_2^2 + 20s_1^2s_3 + 20s_2s_3 + 30s_1s_4 + 24s_5), \ldots$
$Z_{S_n}(\underline{s}) = \frac{1}{n!} \sum_{\underline{a}} h(\underline{a}) s_1^{j_1(\underline{a})} s_2^{j_2(\underline{a})} \cdots s_n^{j_n(\underline{a})}$

(2) $\boxed{A = A_n}$
$Z_{A_3}(\underline{s}) = \frac{1}{3}(s_1^3 + 2s_3)$, $\quad Z_{A_4}(\underline{s}) = \frac{1}{12}(s_1^4 + 3s_2^2 + 8s_1s_3)$,
$Z_{A_5}(\underline{s}) = \frac{1}{60}(s_1^5 + 15s_1s_2^2 + 20s_1^2s_3 + 24s_5), \ldots$
$Z_{A_n}(\underline{s}) = \frac{2}{n!} \sum_{\underline{a}:\ \sum_i (a_i - 1) \text{ gerade}} h(\underline{a}) s_1^{j_1(\underline{a})} s_2^{j_2(\underline{a})} \cdots s_n^{j_n(\underline{a})}$

(3) $A = \langle(1,2,\ldots,n)\rangle =: C_n$. Beachte $C_3 = A_3$.
$Z_{C_4}(\underline{s}) = \frac{1}{4}(s_1^4 + s_2^2 + 2s_4), \quad Z_{C_5}(\underline{s}) = \frac{1}{5}(s_1^5 + 4s_5),$
$Z_{C_6}(\underline{s}) = \frac{1}{6}(s_1^6 + s_2^3 + 2s_3^2 + 2s_6), \quad Z_{C_7}(\underline{s}) = \frac{1}{7}(s_1^7 + 6s_7), \ldots$
$Z_{C_n}(\underline{s}) = \frac{1}{n}\sum_{k|n}\varphi(k)s_k^{\frac{n}{k}}$

(4) $\boxed{A = D_n}$ [1]
$D_3 = S_3, \quad Z_{D_4}(\underline{s}) = \frac{1}{8}(s_1^4 + 2s_1^2 s_2 + 3s_2^2 + 2s_4),$
$Z_{D_5}(\underline{s}) = \frac{1}{2}Z_{C_5}(\underline{s}) + \frac{1}{10}(5s_1s_2^2), \quad Z_{D_5}(\underline{s}) = \frac{1}{2}Z_{C_6}(\underline{s}) + \frac{1}{12}(3s_1^2s_2^2 + 3s_2^3),$
$Z_{D_7}(\underline{s}) = \frac{1}{2}Z_{C_7}(\underline{s}) + \frac{1}{14}(7s_1s_2^3), \quad Z_{D_8}(\underline{s}) = \frac{1}{2}Z_{C_8}(\underline{s}) + \frac{1}{16}(4s_1^2s_2^3 + 4s_2^4), \ldots,$
$Z_{D_n}(\underline{s}) = \frac{1}{2}Z_{C_n}(\underline{s}) + \frac{1}{2n}(ns_1s_2^{\frac{n-1}{2}}),$ falls n ungerade
$Z_{D_n}(\underline{s}) = \frac{1}{2}Z_{C_n}(\underline{s}) + \frac{1}{2n}(\frac{n}{2}s_1^2s_2^{\frac{n-2}{2}} + \frac{n}{2}s_2^{\frac{n}{2}}),$ falls n gerade

(5) $\boxed{A = \{\mathrm{id}\}}$ in S_n, so gilt $Z_{\{1\}}(\underline{s}) = s_1^n$

Quelle: Harary, Palmer, *Graphical Enumeration*, chapter 2.2, Academic Press 1973 (in der Uni Bib der Uni Bielefeld verfügbar).

[1] hier betrachten wir die Operation von D_n auf der Menge der Ecken des regelmäßigen n-Ecks (dies gibt eine Einbettung von D_n nach S_n). Explizit ist dies die Untergruppe von S_n, die von $r = (1,2,\ldots,n)$ und von $s = (1)(2,n)(3,n-1)(4,n-2)\cdots$ erzeugt wird.